详细解答

STEP II 1992，第 1 题

纯数学 · 数列的极限

> **STEP II 1992，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s2-q1

关键思路

每个极限（limit）都只需要一个标准手法，功夫在于选对手法。遇到有理函数（rational function），把分子和分母同除以 n 的最高次幂。遇到有界（bounded）的量除以不断增大的量，就用夹逼（squeeze）。遇到乔装了的已知极限，就作代换（substitution），让伪装自行脱落。至于两个平方根之差，则乘以共轭式（conjugate）：这样可以把两个几乎相等的量之差，化成一个一目了然的商。

解答

第 (i) 部分

把分子和分母同除以 n，

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow \frac{1}{1+0} = 1,$$

因为 $\frac{1}{n} \to 0$。极限是 1。

第 (ii) 部分

最高次幂是 n^2，它只在分母出现。把分子和分母同除以 n^2，

$$\frac{5n+1}{n^2-3n+4} = \frac{\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}} \longrightarrow \frac{0}{1} = 0.$$

极限是 0：分母的增长速度与 n^2 相若，而分子只与 n 相若。

第 (iii) 部分

对于大的整数 n，我们对 $\sin n$ 所知的有用资料只有一项，就是它有界：$|\sin n| \leq 1$。这已经足够，因为

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

所以 $\dfrac{\sin n}{n}$ 被夹在 $-\frac{1}{n}$ 和 $\frac{1}{n}$ 之间，而两者都趋向 0，故极限是 0。

第 (iv) 部分

> ? **想一想** 这不是和 (iii) 一样吗?

不一样：这里的角 $1/n$ 是缩小至 0，而不是不断增大。设 $x = 1/n$。当 $n \to \infty$ 时，我们有 $x \to 0^+$，而所求的式子就是 $\dfrac{\sin x}{x}$，它在 $x \to 0$ 时的极限是以下标准结果

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

（其中一个理解方法：这正是 sin 在 0 的导数（derivative），即 $\cos 0 = 1$。又或者利用 $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots$，于是 $\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \cdots$。）极限是 1。

第 (v) 部分

当 $n \to \infty$ 时，$\arctan n \to \frac{\pi}{2}$，因为当 $\theta \to \frac{\pi}{2}$（由下方趋近）时 $\tan\theta \to +\infty$，而且 arctan 是连续（continuous）且递增的。极限 $\frac{\pi}{2}$ 不是零，所以我们可以取倒数（reciprocal）：

$$(\arctan n)^{-1} \longrightarrow \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

留意 $(\arctan n)^{-1}$ 的意思是 $1/\arctan n$，而不是 arctan 的反函数（inverse function）（那样只会得出 tan）。

第 (vi) 部分

分子和分母都趋向 0，所以不能直接分别取极限。把两者各自乘以其共轭式：

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \qquad \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}.$$

因此

$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}{2(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1)},$$

这里把分子和分母同除以 $\sqrt{n}$。当 $n \to \infty$ 时，两个平方根都趋向 1（因为 $\sqrt{\ }$ 是连续的），所以极限是

$$\frac{1+1}{2(1+1)} = \frac{1}{2}.$$

想一想 为甚么答案应该是 $\frac{1}{2}$，而不是例如 1?

在一个大的 n 附近，$\sqrt{x}$ 的图像几乎是一条斜率（gradient）为 $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ 的直线。所以 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \approx \frac{1}{2\sqrt{n}}$（步长为 1），而 $\sqrt{n+2} - \sqrt{n} \approx \frac{2}{2\sqrt{n}}$（步长为 2）：两者之比约为 $\frac{1}{2}$，正是步长之比。

验算

代入一个大的 n。取 $n = 10^6$：(i) 得 0.999999；(ii) 得 5×10^{-6}；(iii) 约得 -3.5×10^{-7}；(iv) 准确至七个小数位得 1.0000000；(v) 得 0.636620，对照 $2/\pi \approx 0.636620$；而 (vi) 以有理化（rationalised）后的形式计算，得 0.50000012。在 (vi) 中，也应取小的 n 核对有理化后的形式与原式是否一致：当 $n = 1$ 时，两者都等于 $(\sqrt{2}-1)/(\sqrt{3}-1) \approx 0.5658$。

常见错误

- 把 (iii) 和 (iv) 当作同一回事：在 (iii) 中，正弦值保持有界而分母不断增大；在 (iv) 中，分子和分母都缩小至 0，而两者之比趋向 1。
- 把 (v) 中的 $(\arctan n)^{-1}$ 理解为反函数。
- 在 (vi) 中取极大的 n，直接按原式用计算机计算：两个几乎相等的数相减会损失精确度。应先有理化。

STEP 之外

在大学里，“$a_n \to L$” 有精确的定义：对每一个 $\varepsilon > 0$，都存在一个 N，使得对所有 $n > N$ 均有 $|a_n - L| < \varepsilon$。上面用过的每一个手法，例如 (iii) 中的夹逼、(v) 中对非零极限取倒数，以及 (vi) 中把极限移入连续函数之内，在第一个分析（analysis）课程中都会成为由这个定义出发证明的定理。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析学入门书）把这些概念阐述得既严谨又易读。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。