详细解答

STEP I 1992，第 9 题

纯数学 · 微分方程

> **STEP I 1992，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q9

关键思路

一切都源自一条方程：水的体积的变化率等于（流入率）减（流出率）。利用相似三角形（similar triangles），体积是水深 x 的一个简单函数，于是链式法则（chain rule）便把这条方程化为关于 x 的微分方程（differential equation）。在第一部分，这条方程可以干净利落地分离变量（separate variables）；在第二部分，我们不去求解，而是从 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 的正负号，以及它等于零时的水深，直接读出水位的变化情况。

解答

圆锥排空

当水深为 x cm 时，水占据一个较小的圆锥，它与整个滤器相似，高为 x，半径为 r。由相似三角形得 $r/x = a/H$，所以 $r = ax/H$，而水的体积为

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 x = \frac{\pi a^2 x^3}{3H^2}.$$

由链式法则，

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

水只出不入，流出率为 Ax，所以 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = -Ax$。因此

$$\frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -Ax \quad\Longrightarrow\quad x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{AH^2}{\pi a^2},$$

这里我们除以了 x，只要圆锥内仍然有水（$x > 0$），这样做是容许的。左边就是 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}x^2)$，所以 $\frac{1}{2}x^2$ 以恒定的速率 $AH^2/(\pi a^2)$ 减少。它由 $\frac{1}{2}h^2$ 开始，到达 0 时圆锥便排空，所以所

需时间为

$$T = \frac{\frac{1}{2}h^2}{AH^2/(\pi a^2)} = \frac{\pi a^2 h^2}{2AH^2} \text{ 秒},$$

正如题目所求。（等价的做法是分离变量：$\int_h^0 x\,\mathrm{d}x = -\frac{AH^2}{\pi a^2}\int_0^T \mathrm{d}t$。）

同时注水

现在 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = B - Ax$，所以

$$\frac{\pi a^2 x^2}{H^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = B - Ax, \qquad \text{即} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{H^2(B-Ax)}{\pi a^2 x^2}.$$

由于 $x > 0$，因子 $H^2/(\pi a^2 x^2)$ 是正数，所以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 的正负号与 $B - Ax$ 相同。记 $c = B/A$。那么

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} > 0 \text{ 当} x < c, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ 当} x = c, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} < 0 \text{ 当} x > c.$$

所以 $x = c$ 是一个平衡（equilibrium）水深，此时流入量与流出量刚好相抵，而水位总是*朝着* c 移动。这个水深只有在 $c \le H$ 时才可能实际出现在滤器之内，所以各种情况取决于 c 与 h 及 H 的大小比较。

> ? **想一想** 如果水位正朝着 c 移动，它最终会否真的到达该处，甚至越过它？

它不可能越过：要越过 c，就必须先等于 c，而在该处 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$。事实上，它在有限时间内永远到不了 c。把 t 看成 x 的函数，水位由 h 变到介乎 h 与 c 之间的某个水深 X 所需的时间为

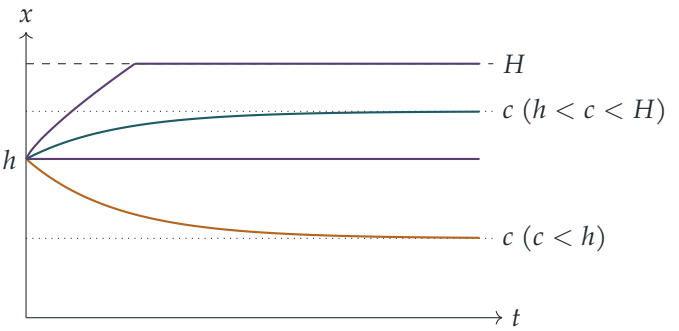
$$t = \int_h^X \frac{\pi a^2 x^2}{H^2(B-Ax)}\,\mathrm{d}x = \int_h^X \frac{\pi a^2 x^2}{AH^2(c-x)}\,\mathrm{d}x.$$

在 $x = c$ 附近，被积函数（integrand）的表现有如 $\frac{\pi a^2 c^2}{AH^2}\cdot\frac{1}{c-x}$，其积分是 $-\ln(c-x)$ 的倍数；当 $X \to c$ 时，它趋向无穷大。所以水位愈来愈慢地逼近 c，要“经过无限长的时间”才到达。无论从哪一边逼近，同样的论证都适用。

因此各种情况如下：

- $B < Ah$（即 $c < h$）。起初 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t < 0$：水位下降，愈降愈慢，并从上方趋向 $c = B/A$ 而不会到达。特别要注意，与第一部分不同，圆锥永远不会排空（因为 $c > 0$）。
- $B = Ah$（即 $c = h$）。这时 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$ 从一开始就成立：水流入的速率与排出的速率相同，水位保持在 h。
- $Ah < B < AH$（即 $h < c < H$）。水位上升，愈升愈慢，并从下方趋向 B/A。水位始终低于 H，所以滤器永远不会满溢。
- $B = AH$（即 $c = H$）。水位朝着边缘上升并趋向 H，但根据上面的论证，它永远不会真正到达，所以（在这个模型中）滤器永远不会满溢。

- $B > AH$（即 $c > H$）。现在对所有 $x \le H$ 都有 $B - Ax \ge B - AH > 0$，而且 $x^2 \le H^2$，所以
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \ge \frac{H^2(B - AH)}{\pi a^2 H^2} = \frac{B - AH}{\pi a^2} > 0.$$
上升速率有一个正的常数作为下界，所以水位在有限时间内到达边缘，最多需时 $\pi a^2(H - h)/(B - AH)$ 秒。此后滤器满溢：水位保持在 H，而多出的 $B - AH\,\mathrm{cm^3\,s^{-1}}$ 从顶部溢出。



草图显示了几种典型情况：下降至 c（琥珀色）、停留在 h 或在有限时间后满溢（紫红色），以及上升至 c（蓝绿色）。

验算

- 代入 $B = 0$ 得 $c = 0$：水位朝着 0 下降，与第一部分吻合（在那里水位确实到达 0，因为流出率 Ax 与 x 成正比，而体积则随 x^3 变化，所以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = -AH^2/(\pi a^2 x)$ 并不趋向 0）。
- 以数值验证：取 $a = 3$、$H = 8$、$A = 0.7$、$h = 5$，公式给出 $T \approx 7.889\,\mathrm{s}$，而按时间逐步推算 x^2 亦得到相同结果。对第二条方程作数值积分，可以确认每一种情况；例如当 $B/A = 9 > H$ 时，水位约在 41.5 s 后到达 H，而当 $B/A = 7$ 时，水位与 7 相差不超过 ε 所需的时间，在 ε 每除以 10 时便增加约 71 s，正是上文所预测的对数式增长。

常见错误

- 使用圆柱体积 $\pi a^2 x$，而不是高为 x 的相似圆锥的体积。
- 声称水位在有限时间内到达 B/A，或声称水位会越过它然后来回振荡。
- 忘记了边缘：平衡水深 B/A 只有在 $B/A \le H$ 时才会达到；否则滤器会满溢。

STEP 之外

第二部分让你初尝微分方程的定性（qualitative）理论：对于 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x)$，你可以找出平衡点（$f$ 的零点），根据 f 在两侧的正负号判断它们的稳定性（stability），再利用解的唯一性（uniqueness）证明解只会逼近平衡点而永远不会越过，整个过程完全不用求解任何方程。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）正是以这种精神处理自治方程（autonomous equations）与稳定性。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。