详细解答

STEP I 1992，第 8 题

纯数学 · 微积分基本定理

STEP I 1992，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s1-q8

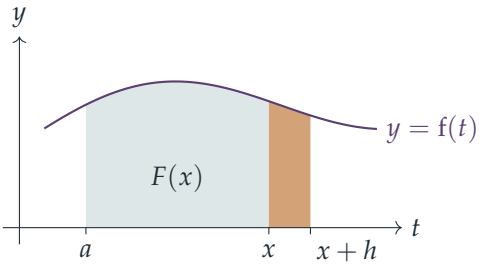
关键思路

上限为变量的积分，是一块随上限移动而增长的面积，而它的增长率正好等于曲线在该上限处的高度。单凭这一个事实（微积分基本定理，Fundamental Theorem of Calculus），就可以把题目中每一条积分方程化为微分方程（differential equation）。求导会失去有关常数的资料，所以我们每次都要把一个方便的 x 值（通常是 $x = 0$）代入原来的方程，把它找回来。

解答

积分的导数

设 $F(x) = \int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$，即 $y = \mathrm{f}(t)$ 之下由 $t = a$ 至 $t = x$ 的面积。把 x 增加一个微小的量 h，就会多出一条阔度为 h 的窄条：



这条窄条的面积是 $F(x+h) - F(x)$。若 f 是连续（continuous）的，则在 $[x, x+h]$ 上，曲线与 $\mathrm{f}(x)$ 的差距不会超过一个微小的量 $\varepsilon(h)$，而当 $h \to 0$ 时 $\varepsilon(h) \to 0$。因此窄条夹在高

度为 $\mathrm{f}(x) \pm \varepsilon(h)$ 的两个长方形之间：

$$(\mathrm{f}(x) - \varepsilon(h))h \le F(x+h) - F(x) \le (\mathrm{f}(x) + \varepsilon(h))h.$$

除以 $h > 0$（$h < 0$ 的情况相同，只是窄条在左边），再令 $h \to 0$，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \mathrm{f}(x).$$

留意结果中并没有 a：改变下限只会令 F 加上一个常数。

方程 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t + 1$

根据上面的结果，右边是可导（differentiable）的，所以 f 也可导，而两边求导可得

$$\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x).$$

把 $x = 0$ 代入原来的方程，积分的区间长度为零，所以 $\mathrm{f}(0) = 1$。

想一想 我们怎样知道 $\mathrm{f}' = \mathrm{f}$ 除了 e^x 的倍数之外，再没有其他解？

考虑 $g(x) = \mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)$。由积法则（product rule），

$$g'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{f}'(x) - \mathrm{f}(x)) = 0,$$

所以 g 是常数，而 $g(0) = \mathrm{f}(0) = 1$。因此 $\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x) = 1$，即 $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^x$，正如题目所求。（反过来，$\int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + 1 = \mathrm{e}^x - 1 + 1 = \mathrm{e}^x$，所以它确实是一个解。）

方程 $\mathrm{f}(x) = \int_0^x \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t$

与之前完全一样，$\mathrm{f}' = \mathrm{f}$，所以 $\mathrm{e}^{-x}\mathrm{f}(x)$ 是常数。但这次代入 $x = 0$ 得 $\mathrm{f}(0) = 0$，所以该常数是 0，而唯一的解是

$$\mathrm{f}(x) = 0 \quad \text{对所有} x.$$

上一条方程中的“+1”正是决定指数函数大小的关键；没有了它，就只剩下零函数。

最后部分

把两边对 x 求导。在右边，x 现在是下限，而

$$\int_x^1 t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^x t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 t^2\mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t = -x^2\mathrm{f}(x).$$

因此

$$\mathrm{f}(x) = -x^2\mathrm{f}(x) + 1 - x^4,$$
$$(1+x^2)\,\mathrm{f}(x) = 1 - x^4 = (1-x^2)(1+x^2).$$

由于 $1+x^2>0$，我们可以把两边除以它，得

$$\mathrm{f}(x)=1-x^2.$$

要求 C，把 $x=0$ 代入题目给出的方程。左边以及 $x-\frac{x^5}{5}$ 各项都变为零，余下

$$0=\int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t+C=\left[\tfrac{t^3}{3}-\tfrac{t^5}{5}\right]_0^1+C=\tfrac{2}{15}+C,$$

所以 $C=-\frac{2}{15}$，正如题目所求。

想一想 求导只告诉我们两边的导数相同。$\mathrm{f}(x)=1-x^2$ 和 $C=-\frac{2}{15}$ 是否真的对每一个 x 都满足方程?

是的。取这个 f 时，两边的导数对所有 x 都相等，所以两边只相差一个常数；而我们选取 C，正是要令两边在 $x=0$ 时相等。因此两边处处相等。反过来，任何解都必须满足求导后的方程，所以 $1-x^2$ 是唯一可能的 f。

验算

- 当 $x=1$：左边是 $\int_0^1(1-t^2)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}$，右边是 $0+1-\frac{1}{5}-\frac{2}{15}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$。两者吻合。
- 数值上，用辛普森法则（Simpson's rule）可得 $\int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t\approx 0.133333=\frac{2}{15}$，而最后一条方程的两边在 $x=-1.3,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.9,\ 2$ 处的相差都在 10^{-10} 之内。

常见错误

- 当变量是下限时忘记负号：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t=-g(x)$。
- 解出 $\mathrm{f}'=\mathrm{f}$ 后停在 $A\mathrm{e}^x$：要靠原来的积分方程在 $x=0$ 时的情况，才能确定 A。
- 写出 $\mathrm{f}(x)=\int_0^x \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$ 这类式子，把哑变量（dummy variable）t 与上限 x 混为一谈。

STEP 之外

未知函数出现在积分之内的方程，称为*积分方程*（integral equations）；本题这类带有可变积分限的方程是沃尔泰拉方程（Volterra equations），它们等价于微分方程的初值问题（initial-value problem）。在大学的第一个分析课程中，你会从黎曼积分（Riemann integral）的定义出发，严谨地证明微积分基本定理，而上面的窄条论证就会变成一个 ε–δ 证明。Abbott 的 *Understanding Analysis* 把这部分写得十分易读。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。