详细解答

STEP I 1992，第 7 题

纯数学 · 整值多项式

> **STEP I 1992，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q7

关键思路

不要试图证明各系数（coefficient）都是整数（integer），因为对二次函数（quadratic function）而言，它们不一定是整数：$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$ 在每个整数处都取整数值。正确的做法是用已知的整数值表示各系数，再代回原式，使 $\mathrm{f}(n)$ 写成 $\mathrm{f}(-1)$、$\mathrm{f}(0)$ 和 $\mathrm{f}(1)$ 的组合，而各项的乘数都是整数。至于最后一部分，只要把原点平移，便是把中间部分再做一次。

解答

线性函数

由于 $\mathrm{g}(0)=b$ 及 $\mathrm{g}(1)=a+b$，我们有 $b=\mathrm{g}(0)$ 及 $a=\mathrm{g}(1)-\mathrm{g}(0)$，两者都是整数。因此对任意整数 n，

$$\mathrm{g}(n)=an+b=\mathrm{g}(0)+n(\mathrm{g}(1)-\mathrm{g}(0)),$$

这是若干个整数乘积之和，所以是整数。

二次函数

设 $p=\mathrm{f}(-1)$，$q=\mathrm{f}(0)$，$r=\mathrm{f}(1)$，三者都是整数。于是

$$p=A-B+C,\qquad q=C,\qquad r=A+B+C,$$

解之，得

$$C=q,\qquad B=\frac{r-p}{2},\qquad A=\frac{p+r-2q}{2}.$$

所以 A 和 B 不一定是整数；它们可以是奇数的一半。把这些结果代入 $\mathrm{f}(n) = An^2 + Bn + C$，并按 p、q 和 r 整理各项：

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(n) &= \frac{p+r-2q}{2}\,n^2 + \frac{r-p}{2}\,n + q \\ &= \frac{n(n-1)}{2}\,p + (1-n^2)\,q + \frac{n(n+1)}{2}\,r.\end{aligned}$$

? **想一想** p 和 r 的乘数，分母都有一个 2。为甚么它们是整数?

对于整数 n，$n-1$ 和 n 是两个连续整数，其中必有一个是偶数，所以 $n(n-1)$ 是偶数。同理，$n(n+1)$ 也是偶数。因此 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 和 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 都是整数，而 $1-n^2$ 也是整数。故此 $\mathrm{f}(n)$ 是若干个整数乘积之和，所以对每个整数 n 它都是整数，这正是所要证明的。

（这三个乘数都是二次式，各自在 $-1, 0, 1$ 的其中一点取值 1，而在另外两点取值 0。这就是拉格朗日（Lagrange）插值法（Lagrange interpolation）。）

最后一部分

设 α 为实数，并定义 $\mathrm{h}(x) = \mathrm{f}(\alpha + x)$。展开后得

$$\mathrm{h}(x) = A(\alpha+x)^2 + B(\alpha+x) + C = Ax^2 + (2A\alpha + B)x + (A\alpha^2 + B\alpha + C),$$

所以 h 同样是形如 $A'x^2 + B'x + C'$ 的函数，而且系数都是实数。中间部分的论证除了用到 A、B、C 是实数之外，并没有用到它们的其他性质。现在

$$\mathrm{h}(-1) = \mathrm{f}(\alpha - 1), \qquad \mathrm{h}(0) = \mathrm{f}(\alpha), \qquad \mathrm{h}(1) = \mathrm{f}(\alpha + 1)$$

按假设都是整数。因此，把中间部分的结果应用于 h，可知对每个整数 n，$\mathrm{h}(n) = \mathrm{f}(\alpha + n)$ 都是整数。具体写出来就是

$$\mathrm{f}(\alpha+n) = \frac{n(n-1)}{2}\,\mathrm{f}(\alpha-1) + (1-n^2)\,\mathrm{f}(\alpha) + \frac{n(n+1)}{2}\,\mathrm{f}(\alpha+1).$$

验算

- 把 $n = -1, 0, 1$ 代入 $\mathrm{f}(n)$ 的公式：各乘数分别变成 $(1,0,0)$、$(0,1,0)$ 和 $(0,0,1)$，正好还原出 p、q、r。
- 以 $\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ 为例，有 $p = 0$，$q = 0$，$r = 1$，而公式给出 $\mathrm{f}(n) = \frac{1}{2}n(n+1)$，即三角形数（triangular numbers）。
- 数值验算：取 $\alpha = \sqrt{2}$ 及 $\mathrm{f}(\alpha - 1) = 3$，$\mathrm{f}(\alpha) = -7$，$\mathrm{f}(\alpha + 1) = 11$，则通过这三点的二次函数给出 $\mathrm{f}(\alpha + 5) = 363.000\ldots$，与 $10 \cdot 3 - 24 \cdot (-7) + 15 \cdot 11 = 363$ 吻合。

常见错误

- 声称 A、B、C 必定是整数。它们不一定是整数，任何依赖这一点的论证都是错的。
- 在最后一部分，试图证明 α 必定是整数或有理数。它可以是任何实数；重要的只是平移。

STEP 之外

在每个整数处都取整数值的多项式（polynomial），恰好就是二项式系数（binomial coefficients）$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$ 的整数组合。对二次多项式而言，这些就是 1、x 和 $\frac{1}{2}x(x-1)$，而这个结果可用有限差分（finite differences）证明：一个 d 次多项式，只要在 $d+1$ 个连续整数处取整数值，它就是整值（integer-valued）多项式。同样的想法也是数值分析（numerical analysis）中牛顿（Newton）前向差分公式（forward-difference formula）的基础。关于整值函数与整除性（divisibility）的更多内容，可参阅 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本数论入门经典）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。