详细解答

STEP I 1992，第 6 题

纯数学 • 小角近似

STEP I 1992，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s1-q6

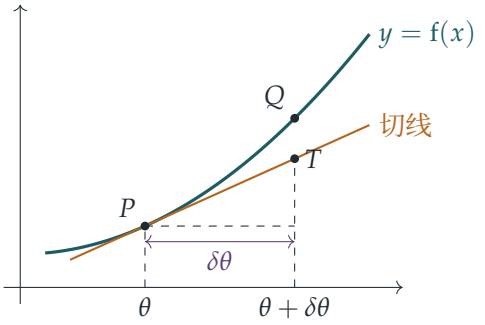
关键思路

远处那一点 C 的角恰好是 ϕ，因为 $\theta + \phi$ 是三角形 ABC 的外角（exterior angle）。于是由正弦定理（sine rule）可求得 AC 的准确值。由于 C 非常遥远，ϕ 必定极小，而小角近似（small-angle approximation，其实就是第一部分的线性近似换了个面貌）可把准确公式化成简单的式子。至于误差的问题，不过是把同一个线性近似再用一次，这次以 ϕ 为变量。

解答

线性近似

在点 $P = (\theta, \mathrm{f}(\theta))$ 附近，f 的图像非常贴近它的切线（tangent），而切线的斜率（gradient）是 $\mathrm{f}'(\theta)$。



向右移动一段距离 $\delta\theta$。沿着切线走，高度上升了（斜率）×（水平距离）$= \mathrm{f}'(\theta)\,\delta\theta$，到

达 T。沿着曲线走，则上升至 Q，高度为 $\mathrm{f}(\theta+\delta\theta)$。当 $\delta\theta\to 0$ 时，间距 QT 缩小得比 $\delta\theta$ 本身还要快，因为

$$\frac{\mathrm{f}(\theta+\delta\theta)-\mathrm{f}(\theta)}{\delta\theta}\to \mathrm{f}'(\theta)$$

正正就是导数（derivative）的定义。所以当 $\delta\theta$ 很小时，

$$\mathrm{f}(\theta+\delta\theta)\approx \mathrm{f}(\theta)+\mathrm{f}'(\theta)\,\delta\theta.$$

C 的距离

在三角形 ABC 中，A 处的角是 θ，而 B 处的外角是 $\theta+\phi$。外角等于两个内对角之和，所以

$$\angle ACB=\phi.$$

B 处的内角是 $\pi-(\theta+\phi)$，而 $\sin(\pi-x)=\sin x$，所以由正弦定理得出以下准确结果：

$$AC=\frac{a\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi},\qquad h=AC\sin\theta=\frac{a\sin\theta\,\sin(\theta+\phi)}{\sin\phi}.$$

> ? **想一想** “h 远大于 a”这个条件究竟在哪里用上?

它告诉我们 ϕ 很小。把准确公式重新整理，得 $\sin\phi=a\sin\theta\sin(\theta+\phi)/h\le a/h$，所以 $h\gg a$ 迫使 $\sin\phi$ 极小，因而 ϕ 也极小。（从非常遥远的 C 望过来，基线（baseline）AB 所张的角几乎是零。）现在取 $\mathrm{f}=\sin$，应用第一部分的结果：

$$\sin(\theta+\phi)\approx\sin\theta+\phi\cos\theta\approx\sin\theta,\qquad \sin\phi\approx\sin 0+\phi\cos 0=\phi.$$

因此

$$h\approx\frac{a\sin^2\theta}{\phi},$$

这正是所求的结果，并且

$$AC=\frac{h}{\sin\theta}\approx\frac{a\sin\theta}{\phi}.$$

（若保留 $\phi\cos\theta$ 一项，会得到 $AC\approx a\sin\theta/\phi+a\cos\theta$。多出来的部分只有 a 的大小，与量级为 h 的距离相比可以忽略不计。）

ϕ 的误差所造成的影响

把 AC 看成函数 $g(\phi)=a\sin\theta\,\phi^{-1}$，其中 θ 固定不变，因为它的量度是准确的。根据第一部分，误差 $\delta\phi$ 会令估计值改变

$$\delta(AC)\approx g'(\phi)\,\delta\phi=-\frac{a\sin\theta}{\phi^2}\,\delta\phi.$$

所以 AC 的误差大小约为 $\dfrac{a\sin\theta}{\phi^2}\,|\delta\phi|$；高估 ϕ 就会低估距离。

想一想 如果把 a 加倍，公式的分子有 a，误差岂不是也加倍?

不会, 因为 ϕ 并非固定: 它取决于基线的长度。点 C（因而 h）保持不变, 而由 $h \approx a\sin^2\theta/\phi$ 可得 $\phi \approx a\sin^2\theta/h$，所以把 a 加倍，ϕ 也大约加倍。（由于 C 非常遥远，θ 只有极轻微的改变。）以固定的量 h 来表示误差:

$$\frac{a\sin\theta}{\phi^2}\,|\delta\phi| \approx a\sin\theta\cdot\frac{h^2}{a^2\sin^4\theta}\,|\delta\phi| = \frac{h^2}{a\sin^3\theta}\,|\delta\phi|.$$

对于相同的仪器误差 $\delta\phi$，AC 的误差与 a 成反比。**把两台望远镜之间的距离加倍，误差大约减半**。

验算

- 取 $a = 1$、$\theta = \pi/6$、$\phi = 10^{-4}$。准确公式给出 $h \approx 2500.43$ 和 $AC \approx 5000.87$；近似公式则给出 2500 和 5000。AC 的差别约为 $0.87 \approx a\cos\theta$，与额外一项所预测的完全吻合。
- 直接把 C 当作两条视线的交点来计算, 对数以千计随机选取的 a、θ 和细小的 ϕ, 结果与两个近似式的差距都在 0.1% 以内, 而细小的 $\delta\phi$ 所引致的 AC 变化亦与 $-a\sin\theta\,\delta\phi/\phi^2$ 相符。
- 对于固定的远处一点 C，分别以基线 a 和 $2a$ 重新计算 ϕ，再对两者加上相同的扰动 $\delta\phi$，所得的误差比为 2。
- 量纲（dimensions）：$a\sin^2\theta/\phi$ 是长度，因为以弧度（radian）表示的角是无量纲的。

常见错误

- ϕ 以度为单位时使用 $\sin\phi \approx \phi$。这个近似式与 sin 的 f′ 一样，必须使用弧度。
- 把 ϕ 当作固定，从而断定误差随 a 加倍。目标固定的是 h，而不是 ϕ。
- 没有察觉 $\angle ACB = \phi$，转而建立坐标来计算。这样做也行得通，但较为费时。

STEP 之外

这就是利用视差（parallax）进行的三角测量（triangulation），天文学家正是用这个方法，以地球轨道为基线，量度邻近恒星的距离。这里的误差分析让我们初尝误差传递（error propagation）的滋味：在一阶近似下，量度值的误差 δx 会在任何由它计算出来的量中变成误差 $g'(x)\,\delta x$。这个想法经带余项的泰勒定理（Taylor's theorem）严格化之后，是

大学一年级分析学（analysis）的核心内容；参阅 Abbott, *Understanding Analysis*（分析学入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。