详细解答

STEP I 1992，第 4 题

纯数学 · 阿根图上的轨迹

> **STEP I 1992，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q4

关键思路

把每个条件改写成关于 x 和 y 的叙述（其中 $z = x + \mathrm{i}y$），或者关于 z 的模（modulus）和辐角（argument）的叙述，所求的区域通常便一目了然。第 (i) 及 (ii) 部分只需要做到这一步。第 (iii) 部分则不同：它描述的是一个由和组成的集合，所以我们要证明两件事。每一个和都落在我们所声称的区域之内，而该区域的每一点也确实是这样的一个和。

解答

以下一律设 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x, y 为实数。

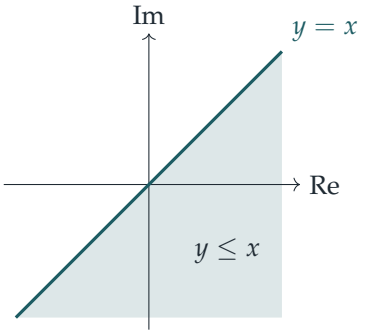
第 (i) 部分

展开得

$$(1+\mathrm{i})z = (1+\mathrm{i})(x+\mathrm{i}y) = (x-y) + \mathrm{i}(x+y),$$

所以 $\mathrm{Re}((1+\mathrm{i})z) = x - y$。条件就是 $x - y \geq 0$，即 $y \leq x$。这个集合是直线 $y = x$ 上及其下方的闭半平面（closed half-plane），包括直线本身。

从几何角度看，乘以 $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}$ 相当于旋转 $\frac{\pi}{4}$ 并放大 $\sqrt{2}$ 倍。因此条件是说，把 z 逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 之后，它会落在右半平面 $\mathrm{Re} \geq 0$ 之内。这表示 $-\frac{3\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$（或 $z = 0$），正是同一个半平面。



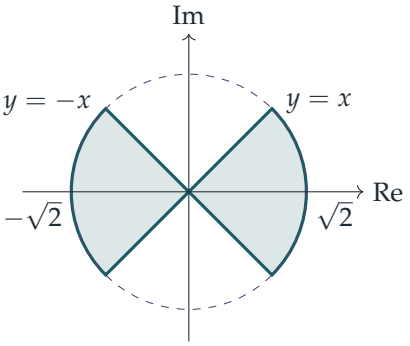
第 (ii) 部分

由于 $|z^2| = |z|^2$，第一个条件就是 $|z|^2 \leq 2$，即 $|z| \leq \sqrt{2}$：这是以原点为圆心、半径为 $\sqrt{2}$ 的闭圆盘（closed disc）。

至于第二个条件，$z^2 = (x^2 - y^2) + 2\mathrm{i}xy$，所以 $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$，条件就是 $x^2 \geq y^2$，即 $|y| \leq |x|$。这是直线 $y = x$ 与 $y = -x$ 之间、包含实轴的一对相对的闭扇形（sector）区域。

用极式（polar form）来做会更快：若 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $z^2 = r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$，所以我们需要 $r \leq \sqrt{2}$ 及 $\cos 2\theta \geq 0$，由此得 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$（或 $z = 0$）。

所求集合是两者的交集（intersection）：两个闭的四分之一圆盘（各为圆心角 $\frac{\pi}{2}$、半径 $\sqrt{2}$ 的扇形），一个向右张开，一个向左张开，在原点相接。整条边界都包括在内。



第 (iii) 部分

设 S 为所有这些和组成的集合。我们声称 S 就是闭圆环（annulus）$\{z : 1 \leq |z| \leq 3\}$。

每一个和都落在圆环之内。若 $|z_1| = 2$ 及 $|z_2| = 1$，由三角不等式（triangle inequality）得

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 3, \qquad |z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2| = 1.$$

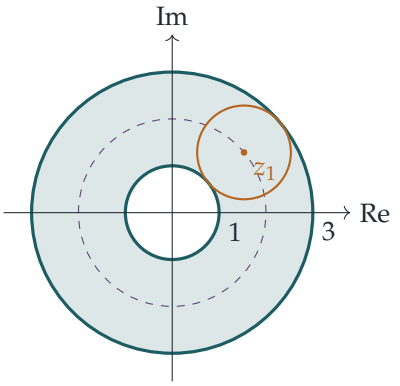
想一想 这样就足够了吗? 我们怎样知道整个圆环都被填满, 而不只是圆环内的某条曲线?

这两个不等式只说明 S 位于圆环之内，所以我们还要证明反方向的包含关系。任取一个满足 $1 \leq |z| \leq 3$ 的 z。我们想找一个模为一的复数 z_2，使得 $|z - z_2| = 2$，因为这样 $z_1 = z - z_2$ 的模便是 2，而且 $z = z_1 + z_2$。

从几何角度看, z_2 必须同时位于以 0 为圆心的单位圆上, 以及以 z 为圆心、半径为 2 的圆上。两个半径分别为 1 和 2 的圆, 若圆心相距 $d = |z|$, 则它们相交当且仅当 $2 - 1 \leq d \leq 2 + 1$, 而这正是我们的条件 $1 \leq |z| \leq 3$。

如果不想直接引用这个关于圆的事实, 可以这样看: 设 $z = re^{i\alpha}$, 并考虑 $f(\varphi) = |z - e^{i\varphi}|$, 它是 φ 的连续（continuous）函数。当 $\varphi = \alpha$ 时，点 $e^{i\varphi}$ 与 z 方向相同，所以 $f(\alpha) = |r - 1| = r - 1 \leq 2$。当 $\varphi = \alpha + \pi$ 时, 它指向相反方向, 所以 $f(\alpha + \pi) = r + 1 \geq 2$。根据中间值定理（intermediate value theorem），存在某个 φ 使得 $f(\varphi) = 2$，于是取 $z_2 = e^{i\varphi}$ 即可。

因此 S 恰好是圆 $|z| = 1$ 与圆 $|z| = 3$ 之间的闭圆环，两个边界圆都包括在内。有一个很好的想像方法：把 z_1 固定在半径为 2 的圆上，$z_1 + z_2$ 便描出一个以 z_1 为圆心的单位圆。当 z_1 绕圆一周时，这些小圆便扫出整个圆环。



琥珀色的圆显示了当 z_1 固定在虚线圆 $|z_1| = 2$ 上某一点时所得的各个和。

验算

- 在 (i) 中，$z = 1$ 给出 $\mathrm{Re}(1 + \mathrm{i}) = 1 \geq 0$，而 $z = \mathrm{i}$ 给出 $\mathrm{Re}(-1 + \mathrm{i}) = -1 < 0$。这与 $y \leq x$ 吻合。
- 在 (ii) 中，$z = 1$ 属于该集合而 $z = \mathrm{i}$ 不属于（$\mathrm{i}^2 = -1$），所以两个扇形应该包含实轴，与图中所画一致。

- 在 (iii) 中，$z_1 = 2$、$z_2 = -1$ 给出 1，而 $z_1 = 2$、$z_2 = 1$ 给出 3，所以两个边界圆都可以达到。我们用 200 000 个随机点测试了全部三个描述。随机所得的和，其模介乎 1.0000 与 3.0000 之间；而对于圆环内的 1000 个随机点，都能找到合适的 z_2，误差在 2×10^{-4} 以内。

常见错误

- 在 (ii) 中，只保留扇形 $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4}$ 而忘记了左边的那一个。z 与 $-z$ 的平方是相同的。
- 在 (iii) 中，用完三角不等式便停下来。这只说明 S 位于圆环之内，并未说明 S 就是整个圆环。
- 没有交代边界是否包括在内。这里每一个不等式都是非严格的，所以每一条边界都包括在内。

STEP 之外

第 (iii) 部分是两个集合的闵可夫斯基和（*Minkowski sum*） $A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$ 的一个小例子，这个概念贯穿几何学和凸分析（convex analysis）。双向包含的论证（先证 $S \subseteq T$，再证 $T \subseteq S$）是证明两个集合相等的标准方法，你在大学里会经常用到。若想从几何角度理解复数乘法就是旋转加缩放（这会令 (i) 和 (ii) 几乎一望而知），可参阅 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以图像方式讲解复分析的著作）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。