详细解答

STEP I 1992，第 3 题

纯数学 · 奇函数与偶函数

STEP I 1992，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s1-q3

关键思路

这里每个积分都是在对称区间 $[-\pi, \pi]$ 上计算的，所以对每个被积函数（integrand），首先要问的是：它是偶函数（even function）还是奇函数（odd function）？奇函数在对称区间上的积分为零，而偶函数的积分则等于在 $[0, \pi]$ 上积分的两倍，而在这个区间上绝对值（modulus）符号可以去掉。看出对称性之后，四个部分各自最多只需一步简短的计算。

解答

我们会用到两个标准结果。若 $f(-x) = f(x)$（偶函数），则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

而若 $f(-x) = -f(x)$（奇函数），则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$。两者都可以用代换（substitution）$x = -u$ 处理 $[-a, 0]$ 上的积分而得出，该积分会变成 $\int_{0}^{a} f(-u)\,\mathrm{d}u$。

我们还需要 $\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = [-\cos x]_{0}^{\pi} = 1 - (-1) = 2$。

第 (i) 部分

由于 $|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$，被积函数是偶函数。在 $[0, \pi]$ 上有 $\sin x \geq 0$，所以在该处 $|\sin x| = \sin x$。因此

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2 \times 2 = 4.$$

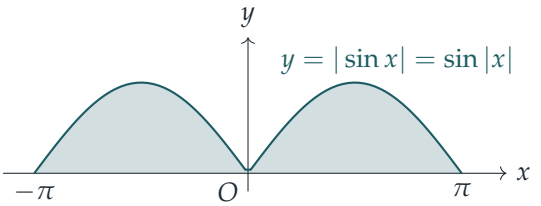
第 (ii) 部分

由于 $|-x| = |x|$，函数 $\sin|x|$ 是偶函数。在 $[0, \pi]$ 上，$|x| = x$，所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin|x|\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 4.$$

想一想 (i) 和 (ii) 的答案相同，是巧合吗?

不是:在这个区间上,两个被积函数其实是同一个函数。当 $0 \le x \le \pi$ 时,两者都等于 $\sin x$。当 $-\pi \le x \le 0$ 时,我们有 $\sin x \le 0$,所以 $|\sin x| = -\sin x$,而 $\sin|x| = \sin(-x) = -\sin x$ 亦然。两条曲线要到 $[-\pi, \pi]$ 之外才分道扬镳：例如在 $x = 3\pi/2$ 处，$|\sin x| = 1$，但 $\sin|x| = -1$。



阴影区域由正弦曲线的两个拱形组成，每个拱形的面积为 2。

第 (iii) 部分

这里 $(-x)\sin(-x) = (-x)(-\sin x) = x\sin x$，所以被积函数是偶函数（两个奇函数之积）。因此

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x.$$

运用分部积分法（integration by parts），取 $u = x$ 及 $\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$（故 $v = -\cos x$）:

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x &= [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x \\ &= (-\pi\cos\pi - 0) + [\sin x]_0^{\pi} \\ &= \pi + 0 = \pi.\end{aligned}$$

因此

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x = 2\pi.$$

第 (iv) 部分

现在 $(-x)^{10}\sin(-x) = x^{10}(-\sin x) = -x^{10}\sin x$，所以被积函数是奇函数（偶函数乘以奇函数）。于是它在对称区间上的积分为

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^{10}\sin x\,\mathrm{d}x = 0.$$

根本不必做十次分部积分！来自 $[-\pi, 0]$ 和 $[0, \pi]$ 的贡献大小相等、符号相反，刚好完全抵消。

验算

- 从面积判断：在 (i) 中，被积函数非负且最大为 1，所以答案必定介乎 0 与 $2\pi \approx 6.28$ 之间；4 符合这个要求。
- 在 (iii) 中，$x\sin x \geq 0$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上成立，所以答案必定为正数；2π 确是正数。对 $\sin x - x\cos x$ 求导得 $x\sin x$，由此确认原函数（antiderivative）无误。
- 以森逊法则（Simpson's rule）取 20 000 个子区间计算，四个积分分别得 4.0000000、4.0000000、6.2831853 和 0.0000000。在 (iv) 中，这个零并非只是一个很小的数：$|x^{10}\sin x|$ 在同一区间上的积分约为 13 275，可见抵消是精确而彻底的。

常见错误

- 写成 $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \big[-\cos x\big]_{-\pi}^{\pi} = 0$，忽略了绝对值。一个永不取负值的被积函数，除非几乎处处（almost everywhere）为零，否则积分不可能是 0。
- 因为 $\sin x$ 是奇函数，便以为 $\sin|x|$ 也是奇函数。任何函数与 $|x|$ 复合，得出的必定是偶函数。
- 在 (iii) 的分部积分中弄错正负号：记住 $\cos\pi = -1$，所以 $-\pi\cos\pi = +\pi$。

STEP 之外

把函数分拆成偶部和奇部，$f(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) + \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$，正是傅里叶级数（Fourier series）的出发点。在 $[-\pi, \pi]$ 上，偶部展开成余弦项，奇部展开成正弦项，而像 (iii) 和 (iv) 这类积分，正是用来计算各项系数（coefficients）的积分。例如，x 的傅里叶级数中 $\sin x$ 的系数，就是来自 (iii) 的积分。Boyce 与 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入门教材）对傅里叶级数及其在求解微分方程（differential equations）中的应用，有一段浅白易读的介绍。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。