详细解答

STEP I 1992，第 2 题

纯数学 · 幻方与计数

STEP I 1992，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

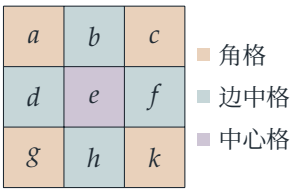
step.maths.org/questions/92-s1-q2

关键思路

一切都来自巧妙地把各条线加起来。把三个横行全部相加，每个数恰好用了一次，由此得出 n。把通过中心的四条线相加，每个数用了一次，而中心则用了四次，这就确定了 e。此后，题目就变成一个规模不大、但须小心处理的分情况讨论（case analysis）：一旦知道 e，每条通过中心的线都把两个数配成一对，其和固定，于是留给大数的空间就非常有限。最后，正方形的对称性（symmetry）（即把它旋转）便替我们完成计数。

解答

先为三类方格命名会比较方便：四个角格 a,c,g,k，四个边中格 b,d,f,h，以及中心格 e。



第 (i) 部分

三个横行合起来，九个数每个恰好出现一次。因此，把三个横行的和相加，

$$3n = (a+b+c)+(d+e+f)+(g+h+k) = 1+2+\cdots+9 = 45,$$

故 $n = 15$。

第 (ii) 部分

通过中心的线共有四条：中间横行、中间直行和两条对角线。把它们相加，

$$(d+e+f)+(b+e+h)+(a+e+k)+(c+e+g)=4n=60.$$

在左边，除 e 以外的每个数恰好出现一次，而 e 出现四次，所以左边等于 $45+3e$。因此 $45+3e=60$，得 $e=5$。

由此得到一个有用的推论：由于每条通过中心的线之和都是 15，而 $e=5$，所以隔着中心相对的两个方格，其和必为 10：

$$a+k=c+g=b+h=d+f=10.$$

第 (iii) 部分

因为 $e=5$，所以 9 不在中心格。于是我们只须证明 9 不可能在角格。

用反证法（proof by contradiction）：假设 9 在某个角格。对每个角格，论证都是一样的，所以取 $a=9$。那么对角的角格是 $k=10-9=1$。最上横行和最左直行都通过 a，所以

$$b+c=15-9=6 \qquad 及 \qquad d+g=15-9=6.$$

b,c,d,g 这四个数互不相同，并且取自用去 $1,5,9$ 之后余下的数，即 $\{2,3,4,6,7,8\}$。要把 6 写成这个集合中两个不同的数之和，唯一的方法是 $2+4$（因为 $1+5$ 用了已经填入的数，而 $3+3$ 则重复）。所以 $\{b,c\}=\{2,4\}$ 且 $\{d,g\}=\{2,4\}$，这就需要 2 和 4 各用两次，与各数互不相同矛盾。

> ? **想一想** 为甚么只处理角格 a 就已足够?

对任何一个角格，同样的三项事实都成立：对角的角格必定是 1，而沿正方形的边通过该角格的两条线，各自余下的两个数之和都须为 6。所以会出现同样的矛盾。（换个说法：把一个幻方（magic square）旋转四分之一圈，会得到另一个幻方，而旋转可把 a 带到其余每一个角格。）

所以 9 既不在中心格，也不在角格，它必定是 b,d,f,h 其中之一。

第 (iv) 部分

设 $b=9$。那么 $h=10-9=1$，而最上横行给出 $a+c=6$。一如 (iii)，未用的数是 $\{2,3,4,6,7,8\}$，其中和为 6 的一对相异数只有 $\{2,4\}$。所以或者 $a=2$, $c=4$，或者 $a=4$, $c=2$。

一旦 a 和 c 确定，其余各数都由相对的数对和左右两个直行完全决定：

- $a = 2$，$c = 4$：则 $k = 10 - a = 8$，$g = 10 - c = 6$，$d = 15 - a - g = 7$ 及 $f = 15 - c - k = 3$。
- $a = 4$，$c = 2$：则 $k = 6$，$g = 8$，$d = 15 - 4 - 8 = 3$ 及 $f = 15 - 2 - 6 = 7$。

推出这些必然的值，只说明它们是仅有的候选；我们仍须验证它们确实可行。在两种情况中，所填的数都是 $1, \ldots, 9$ 各一次，而且每个横行、直行和对角线之和都是 15：

2	9	4
7	5	3
6	1	8

4	9	2
3	5	7
8	1	6

（例如在第一个之中：横行 $15, 15, 15$；直行 $2+7+6$、$9+5+1$、$4+3+8$；对角线 $2+5+8$、$4+5+6$。）所以 $b = 9$ 的幻方恰好有两个，而第二个是第一个以中间直行为轴的镜像。

第 (v) 部分

把一个幻方顺时针旋转四分之一圈，会得到另一个幻方：它的横行是原来的直行，它的直行是原来的横行（次序倒转），而两条对角线互换。四分之一圈的旋转是可逆的（逆时针转回去），所以它给出幻方之间的一一对应（one-to-one correspondence）。

顺时针旋转四分之一圈，会把方格 b 移到方格 f。所以 $f = 9$ 的幻方，正好就是 $b = 9$ 的幻方旋转四分之一圈所得的，而且恰好有 2 个。再转一次，$h = 9$ 的恰好有 2 个，$d = 9$ 的也恰好有 2 个。

由 (iii)，每个幻方的 9 都恰好位于 b, f, h, d 其中一个位置，所以这四组互不相交，并且涵盖了所有幻方。因此共有

$$4 \times 2 = 8$$

个不同的 3×3 幻方。它们就是 (iv) 中的两个幻方，连同它们旋转四分之一圈、半圈和四分之三圈所得的幻方；换个说法，它们是同一个幻方的八个旋转和反射（reflection）。

验算

用电脑对 $1, \ldots, 9$ 的全部 $9! = 362\,880$ 种排列作一次简短的搜索，恰好找到 8 个幻方。它们的各线之和全是 15，中心全是 5，9 全都在边中格，而 $b = 9$ 的两个正是 (iv) 中找到的幻方。你也可以亲手验证：在每个幻方中，1 都在 9 的对面，而偶数 $2, 4, 6, 8$ 占满四个角格。

常见错误

- 在 (iv) 中，忘记验证推出来的方阵确实是幻方。那段推论只说明其他填法都不可行。

- 在 (v) 中，只答“2”或“4”，却没有解释为甚么旋转会产生新的、真正不同的幻方，或者没有利用 (iii) 说明四种情况涵盖一切而又互不重叠。

STEP 之外

第 (v) 部分让你初尝*群作用*（group action）的滋味：正方形的八个对称（四个旋转和四个反射）构成一个群（group），而全部幻方在这个群的作用下组成单一个轨道（orbit）。像这样在对称意义下计算物件的数目，会在伯恩赛德引理（Burnside's lemma）中得到进一步发展，你会在群论（group theory）的入门课程中遇到它。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）是一本平易近人的入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。