详细解答

# STEP I 1992，第 16 题

概率与统计 • 网络可靠度

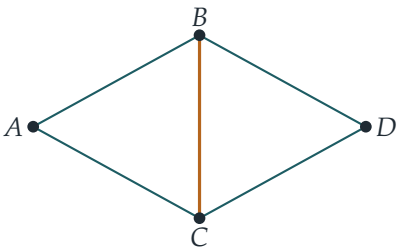
**STEP I 1992，第 16 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s1-q16

## 关键思路

这个道路网络是一座“桥”：由 $A$ 到 $D$ 有两条路线，一条经过 $B$，一条经过 $C$，而道路 $CB$ 在中间把两者连接起来。处理这座桥最干净利落的方法，是按 $CB$ 是否畅通来取条件（condition），因为一旦知道这一点，一切都化为串联（series）和并联（parallel）的道路。为一条道路加设防雪设施，效果等同把它的两个端点合并成一个市镇，所以我们可以考察两个方案各自产生的较小网络，从而比较两者。




## 解答

以下一律以 $q = 1 - p$ 表示某条道路畅通的概率。各条道路是否被封是互相独立（independent）的，所以任何一种特定的“畅通与被封”组合，其概率都是若干个 $p$ 和 $q$ 的乘积。由 $A$ 到 $D$ 而不重复经过任何市镇的路线共有四条：

$$ABD, \qquad ACD, \qquad ABCD, \qquad ACBD.$$

### 唯一畅通的路线是 $ABCD$

要 $ABCD$ 畅通，$AB$、$BC$ 和 $CD$ 必须全部畅通。要它成为唯一畅通的路线，$ABD$ 必须被封，而由于 $AB$ 畅通，这就迫使 $BD$ 被封。同理，$ACD$ 必须被封，而由于 $CD$ 畅通，这就迫使 $AC$ 被封。这样 $ACBD$ 也自动被封（它同时用到 $AC$ 和 $BD$）。

所以这个事件（event）恰好就是“$AB$、$BC$、$CD$ 畅通，而 $AC$、$BD$ 被封”。由独立性，其概率为

$$q^3p^2 = p^2(1-p)^3,$$

正如所求。

### 现时能够通行的概率

设 $E$ 为 $A$ 与 $D$ 有未被封的道路相连这个事件，并按道路 $CB$ 的状况取条件。

*若 $CB$ 畅通*，则 $B$ 和 $C$ 就如同一个市镇。除非 $AB$ 和 $AC$ 同时被封，否则我们可以由 $A$ 到达这个市镇；除非 $BD$ 和 $CD$ 同时被封，否则可以由这个市镇到达 $D$。这两件事涉及不同的道路，所以

$$\mathrm{P}(E \mid CB \text{ 畅通}) = (1-p^2)^2.$$

*若 $CB$ 被封*，可行的路线只有 $ABD$ 和 $ACD$，各自畅通的概率为 $q^2$，而且两者没有共用的道路，所以互相独立。因此

$$\mathrm{P}(E \mid CB \text{ 被封}) = 1-(1-q^2)^2.$$

改为计算 $A$ 与 $D$ 被隔绝的概率会较为方便。由于 $1-(1-p^2)^2 = p^2(2-p^2)$ 及 $1-q^2 = p(2-p)$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{被隔绝}) &= q\,p^2(2-p^2) + p\cdot p^2(2-p)^2\\ &= p^2[(1-p)(2-p^2) + p(4-4p+p^2)]\\ &= p^2\,(2+2p-5p^2+2p^3).\end{aligned}$$

### 应为哪条道路加设防雪设施

*为 $CB$ 加设防雪设施*。这时 $CB$ 永远畅通，所以我们永远处于上面的第一种情况：

$$\mathrm{P}(\text{被隔绝}) = 1-(1-p^2)^2 = 2p^2-p^4.$$

*为 $AB$ 加设防雪设施*。这时 $A$ 和 $B$ 就如同一个市镇，而我们与 $D$ 被隔绝，当且仅当 $BD$ 被封，并且经 $C$ 也无路可通。经 $C$ 通行需要 $CD$ 畅通，并且 $AC$、$CB$ 之中至少有一条畅通，所以此路不通的概率为 $p+q\,p^2$。因此

$$\mathrm{P}(\text{被隔绝}) = p\,(p+qp^2) = p^2+p^3-p^4.$$

**想一想** 两个答案都以 $p^2$ 项开头。怎样才能判断对每一个 $p$ 而言哪一个较小?

把两者相减:

$$(2p^2 - p^4) - (p^2 + p^3 - p^4) = p^2 - p^3 = p^2(1-p) > 0 \quad \text{其中} 0 < p < 1.$$

所以为 $AB$ 加设防雪设施，被隔绝的机会总是较小，不论 $p$ 的值是多少。政府应该选择 $AB$；两个选择永远不会同样好。

这与直觉吻合。修好 $CB$ 只在需要它作为绕道的一部分时才有帮助，但修好 $AB$ 却令 $A$ 和 $B$ 成为一个市镇，这个市镇既有直路 $BD$ 通往 $D$，也有经过 $C$ 的路径可走。

### 最后一部分

当 $p = \frac{1}{10}$ 时，现时被隔绝的概率为

$$\frac{1}{100}\left(2 + \frac{2}{10} - \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}\right) = \frac{1}{100} \times 2.152 = 0.02152.$$

这大于 $\frac{1}{100}$，所以政府会落实计划（而且根据上一部分，它会为 $AB$ 加设防雪设施）。

单看主项 $2p^2 = 0.02$ 已足以定论：只需两条道路被封便被隔绝的情况有两种，即 $\{AB, AC\}$ 和 $\{BD, CD\}$。

## 验算

- 当 $p \to 0$ 时，被隔绝的概率约为 $2p^2$，这正好数算了那两对道路：其中一对被封，便会把 $A$ 或 $D$ 孤立起来。为 $AB$ 加设防雪设施后，只剩下 $\{BD, CD\}$ 这一对，概率约为 $p^2$，与我们的公式相符。为 $CB$ 加设防雪设施后，两对仍然存在，概率约为 $2p^2$。
- 当 $p = 1$ 时，现时的公式给出 $1 \cdot (2 + 2 - 5 + 2) = 1$：若每条道路都被封，我们必定被隔绝。
- 把道路畅通与被封的全部 $2^5$ 种组合逐一穷举，对多个 $p$ 值都证实了以上每一条公式。当 $p = \frac{1}{10}$ 时，穷举给出现时的概率为 0.02152，为 $AB$ 加设防雪设施后为 0.0109，为 $CB$ 加设防雪设施后为 0.0199。模拟 (simulation) $2 \times 10^5$ 个冬天所得的结果是 0.0215。

## 常见错误

- 把四条路线畅通的概率相加。这些路线有共用的道路，所以这些事件互有重叠，相加会重复计算。
- 在第一部分，忘记了“唯一畅通的路线”会迫使 $AC$ 和 $BD$ 被封，结果只写出 $(1-p)^3$。

- 只在 $p = \frac{1}{10}$ 时比较两个方案。两者之差 $p^2(1-p)$ 说明对每一个 $p$ 而言都是 $AB$ 较佳。

## STEP 之外

这是网络可靠性（network reliability）的一个小例子，而按一条边取条件（或把它的两端合并）这个技巧，正是贯穿图论（graph theory）的删除—收缩（deletion–contraction）思想。对于大型的随机网络，同样的问题会引向渗流理论（percolation theory），当中 $p$ 有一个分明的临界值，一旦越过，长距离的连通便会突然消失。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）是打好这里所用的条件概率工具的好地方。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。