详细解答

STEP I 1992，第 13 题

力学 • 逃逸速率与径向下落

STEP I 1992，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s1-q13

关键思路

力只取决于距离 x，所以最自然的工具是把运动方程（equation of motion）写成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 的形式，一经积分便立即得到联系速率与距离的能量方程（energy equation）。在第一部分，v^2 永远不可能是负数这一事实，把该方程变成 x 的一个上限。在第二部分，能量方程把 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 表示为 x 的函数，再用分离变量法（separating the variables）便可求出时间。

解答

我们把太阳当作固定不动，把彗星当作质点（particle），除了题目给出的引力外不受其他力。由于引力沿着连接彗星与太阳的直线作用，一颗正在直接远离太阳（或处于静止）的彗星会一直沿着该直线运动。因此 x 是一条直线上的坐标，我们设 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，并以 v 为正表示远离太阳。



能量方程

沿该直线应用牛顿第二定律（Newton's second law），力指向太阳（即 x 减少的方向），得

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{Gm}{x^2}.$$

把加速度写成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 并约去 m，

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{G}{x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \tfrac{1}{2}v^2 = \frac{G}{x} + C$$

其中 C 为某个常数。无论彗星朝哪个方向运动，这条式在整个运动过程中都成立。（这就是每单位质量的能量守恒（conservation of energy）：动能（kinetic energy）$\frac{1}{2}v^2$ 加上势能（potential energy）$-G/x$。）

x 可变得任意大的条件

在给定的一刻 $x = h$ 而 $v = V$，所以 $C = \frac{1}{2}V^2 - \dfrac{G}{h}$，而在其后任何时刻，

$$v^2 = V^2 - \frac{2G}{h} + \frac{2G}{x}.$$

我们证明其逆否命题（contrapositive）：若 $V^2 < 2G/h$，则 x 有界（bounded）。

> **想一想** 原则上，彗星往后可以有各式各样的运动方式。单凭一条方程，怎能在所有时刻都限制住 x?

因为无论彗星在做甚么，每一瞬间都有 $v^2 \geq 0$。假设 $V^2 < 2G/h$，并设 $k = \dfrac{2G}{h} - V^2 > 0$。那么能量方程说明

$$\frac{2G}{x} = v^2 + k \;\geq\; k, \qquad \text{所以} \qquad x \leq \frac{2G}{k} = \frac{2Gh}{2G - hV^2}$$

在其后任何时刻都成立（由于 $x > 0$ 且 $k > 0$，我们可以把两边乘开）。所以 x 永远不能超过固定值 $2Gh/(2G - hV^2)$：彗星上升到该距离，在那里 $v = 0$，然后往回落。因此，除非 $V^2 \geq 2G/h$，否则 x 不可能变得任意大，这正是所要证明的。

（逆命题（converse）也成立。若 $V^2 \geq 2G/h$，则彗星向外运动时 $v^2 \geq 2G/x > 0$，所以它永不停下；又因为只要 $x \leq X$ 便有 $v^2 \geq 2G/x \geq 2G/X$，它不可能永远停留在任何距离 X 以内。这就是逃逸速率（escape speed）。）

坠入太阳所需的时间

现在彗星在极远的距离 D 处由静止开始运动。由静止释放后，它笔直地坠向太阳。由能量方程，以及在 $x = D$ 处 $v = 0$，

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \frac{G}{x} - \frac{G}{D}.$$

> **想一想** “极远的距离”对那个常数来说意味着甚么?

这表示我们令 $D \to \infty$，于是 $G/D \to 0$，常数为零：彗星的总能量为零。（若 D 很大但有限，彗星只会稍为慢一点，所需时间稍为长一点，而相差的量当 $D \to \infty$ 时趋向零。）所以在距离 x 处它的速率是 $\sqrt{2G/x}$，而且由于 x 正在减少，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2G}{x}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{2G}\,\mathrm{d}t.$$

设 T 为由 $x = h$ 到 $x = 0$ 所需的时间。积分得

$$\sqrt{2G}\,T = \int_0^h \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}h^{3/2},$$

所以

$$T = \frac{2h^{3/2}}{3\sqrt{2G}} = \frac{h}{3}\sqrt{\frac{2h}{G}}.$$

（被积函数（integrand）$\sqrt{x}$ 在 $x = 0$ 处完全没有问题，所以尽管彗星的速率无止境地增大，它确实在有限时间内到达太阳。）

验算

- 单位：力 Gm/x^2 是质量乘以加速度，所以 G 的单位是 $\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-2}$。于是 V^2 和 $2G/h$ 的单位都是 $\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-2}$，而 $h^{3/2}/\sqrt{G}$ 的单位是秒。
- 在 $x = h$ 处彗星的速率是 $\sqrt{2G/h}$。假如它保持这个速率，所需时间便是 $h/\sqrt{2G/h} = \frac{h}{2}\sqrt{2h/G}$，这比 T 长；彗星一直在加速，所以理应如此。事实上 T 是这个时间的三分之二。
- 数值验证，取 $G = h = 1$：由 $x = 1$、$v = \sqrt{1.5}$ 出发逐步推算运动，彗星在 $x = 4.000$ 处掉头，与 $2Gh/(2G - hV^2) = 4$ 的预测相符。由 $x = 1$、$v = -\sqrt{2}$ 出发，它经过 0.4714 后到达太阳，与 $T = \frac{1}{3}\sqrt{2} \approx 0.47140$ 吻合。若改为由 $D = 10^6$ 而非无穷远处从静止出发，T 只在小数点后第七位才有变化。

常见错误

- 漏掉 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2G/x}$ 中的负号，结果得到负的时间，或者由 0 积分到 h 却没有说明原因。
- 只证明彗星会减速：每一颗向外运动的彗星都会减速，即使是能够逃逸的那些也一样。重点在于，当 $V^2 < 2G/h$ 时，v^2 在超过某个距离后便会变成负数。

STEP 之外

$\frac{1}{2}v^2 - G/x$ 这个量是牛顿引力场（Newtonian gravitational field）中每单位质量的能量，它的正负决定了轨道是束缚轨道（椭圆）还是逃逸轨道（抛物线和双曲线）。最后一部分的零能量坠落，是抛物线轨道退化成直线的特殊情况，而 $T \propto h^{3/2}$ 则与开普勒第三定律（Kepler's third law）一脉相承。大学一年级有关轨道的课程，正是由同样的能量方程和角动量（angular momentum）方程出发，推导出这一切；Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对有心力（central forces）和轨道有透彻的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。