详细解答

STEP I 1992，第 12 题

力学 · 涉及摩擦力的静力学

> **STEP I 1992，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q12

关键思路

两把梯子都是轻质的，所以要为其中一把梯子列出有用的方程，唯一的办法就是对铰链（hinge）A 取力矩（moments）：这样可以消去另一把梯子所施的未知力，以及 A 处负重所施的力。梯脚有向外滑开的趋势，而这股向外的推力，一部分由摩擦力（friction）抵消，一部分由木杆抵消。在梯子倒塌的一刻，摩擦力已经用尽，余下的就要由木杆承担。

解答

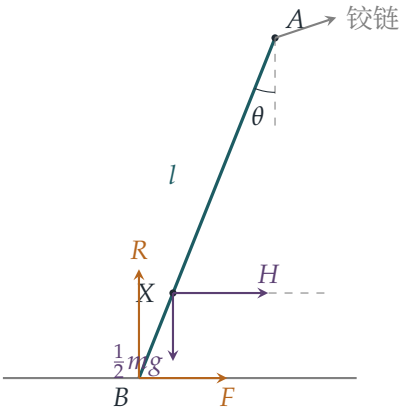
模型

两把梯子是轻杆，在 A 处以光滑铰链连接。木杆 XY 是均匀的，质量为 m，并在 X 和 Y 处以销钉接合（pin-jointed）。质量 M 视为位于 A 的质点（particle）。设 $t = \tan\theta$。由于整个装置左右对称，两只梯脚所受的法向反作用力（normal reaction）相等，设为 R；对整座折梯沿铅垂方向分解力，可得

$$2R = (M+m)g \quad \Longrightarrow \quad R = \tfrac{1}{2}(M+m)g.$$

由于梯子向外倾斜，梯脚有向外滑开的趋势，所以每只梯脚所受的摩擦力 F 都指向内。

木杆所施的力。 木杆是水平的，而且本身有重量，所以它两端所受的力并不沿着木杆的方向。根据对称性，两端各承受木杆重量的一半，所以梯子在 X 处对木杆施加向上的力 $\frac{1}{2}mg$，同时施加一个向外的水平力 H（即张力（tension））。根据牛顿第三定律（Newton's third law），木杆在 X 处对梯子 AB 施加向内的水平力 H 和向下的铅垂力 $\frac{1}{2}mg$。



对梯子 AB 以 A 为支点取力矩

从 A 量起，梯脚 B 的水平距离为 $l\sin\theta$，铅垂距离为向下 $l\cos\theta$；而 X 的水平距离为 $\frac{3}{4}l\sin\theta$，铅垂距离为向下 $\frac{3}{4}l\cos\theta$。对 A 取力矩（作用于 A 的力全部没有力矩）：

- R 使梯子向一个方向转动，力矩为 $Rl\sin\theta$；
- F 和 H（两者都指向内，作用点在 A 的下方）使梯子向另一个方向转动，力矩分别为 $Fl\cos\theta$ 和 $H\cdot\frac{3}{4}l\cos\theta$；
- 作用于 X 的向下力 $\frac{1}{2}mg$ 与 R 在同一侧，但方向相反，其力矩 $\frac{1}{2}mg\cdot\frac{3}{4}l\sin\theta$ 与 R 的力矩相抗。

因此

$$Fl\cos\theta+\tfrac{3}{4}Hl\cos\theta=Rl\sin\theta-\tfrac{3}{8}mgl\sin\theta,$$

两边除以 $l\cos\theta$，再代入 R 的值，得

$$F+\tfrac{3}{4}H=t\left(\tfrac{1}{2}(M+m)g-\tfrac{3}{8}mg\right)=t\left(\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{8}m\right)g. \qquad (*)$$

? **想一想** 摩擦力和木杆都在把梯脚向内拉住。那么 F 应该取哪个值?

方程 $(*)$ 表明，摩擦力和张力要合力分担一个固定的总量：摩擦力承担得愈多，木杆需要承担的就愈少。所以，只要有某个容许的摩擦力（$F\le\mu R$）能令 $H\le T$，折梯就不会倒塌；而最小的张力出现在摩擦力最大的时候，即 $F=\mu R$。这正是题目容许我们假设的、倒塌一刻的极限状态（limiting state）。把 $F=\mu R=\frac{1}{2}\mu(M+m)g$ 代入 $(*)$：

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{4}H&=t\left(\tfrac{1}{2}M+\tfrac{1}{8}m\right)g-\tfrac{1}{2}\mu(M+m)g\\&=\tfrac{1}{2}(t-\mu)Mg+\tfrac{1}{8}(t-4\mu)mg,\end{aligned}$$

所以

$$H = \tfrac{2}{3}(t-\mu)Mg + \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg.$$

由于 $t > \mu$，H 随 M 增加而增加：假如没有木杆，单靠摩擦力连负重本身也支撑不住（当 $m = 0$ 时，我们需要 $t \le \mu$）。

最大的安全质量

只要 $H \le T$，木杆就不会折断，即

$$\tfrac{2}{3}(t-\mu)Mg \le T - \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg,$$

两边除以正数 $\tfrac{2}{3}(t-\mu)g$，得

$$\boxed{M \le \frac{6T - (\tan\theta - 4\mu)mg}{4(\tan\theta - \mu)g}}$$

所以，可以安全地放在 A 处的最大质量是 $\dfrac{6T - (\tan\theta - 4\mu)mg}{4(\tan\theta - \mu)g}$。

因自身重量而损毁

当 A 处没有放任何东西（$M = 0$）时，所需的张力为 $H = \tfrac{1}{6}(t-4\mu)mg$，所以木杆会在以下情况折断：

$$\tfrac{1}{6}(\tan\theta - 4\mu)mg > T \iff \tan\theta > \frac{6T}{mg} + 4\mu,$$

这正是题目要求证明的结果。在这个情况下，上面 M 的上界是负数：任何负重都不安全，因为折梯连自身也支撑不住。

验算

- 如果 T 极大，安全质量也极大；如果 $\tan\theta$ 只是略大于 μ，分母就极小，同样几乎任何负重都安全，因为单靠摩擦力已差不多足够。
- 我们对完整的静力学（statics）问题（两把梯子、木杆和 A 处的销钉，共十二个未知的分力，两只梯脚的摩擦力均达极限值）作数值求解，随机选取 2000 组配置，所得结果与张力公式吻合，误差约为 10^{-12}。例如，当 $\theta = 45°$、$\mu = 0.2$、$m = 2\,\mathrm{kg}$ 及 $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ 时，$M = 0$ 的木杆张力为 $\tfrac{1}{6}(0.2)(19.6) \approx 0.653\,\mathrm{N}$。

常见错误

- 把木杆当作轻质拉杆，以为 X 处的力完全沿着 XY 的方向。木杆是有重量的，所以每一端还要在铅垂方向承受 $\tfrac{1}{2}mg$，而 $\tfrac{1}{8}m$ 和 4μ 正是由此而来。

- 把梯脚的摩擦力画成向外。由于 $\tan\theta > \mu$，梯脚有向外张开的趋势，所以摩擦力指向内，与木杆一同把梯脚拉住。

STEP 之外

像这样的框架，单凭平衡（equilibrium）方程并不足以确定每一个力（在这里，摩擦力和张力可以此消彼长），称为*静不定*（statically indeterminate）。工程师会借助额外的资料来处理这类情况：例如本题所用的极限条件，或者构件的弹性（elasticity）。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）是加深理解力、力矩（torque）和平衡的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。