详细解答

STEP I 1992，第 11 题

力学 · 弹性绳的平衡

STEP I 1992，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/92-s1-q11

关键思路

每个质点都处于平衡（equilibrium）状态，所以紧接其上方的张力比紧接其下方的张力大 mg。这就把三个张力联系起来，而虎克定律（Hooke's law）则把张力化为伸长量。我们还需要的另一项事实是几何上的：三条拉长后的弦线，长度之和必须等于房间的高度。一旦求得各高度，“$CD = a$”只不过是说最低的那条弦线没有张力。

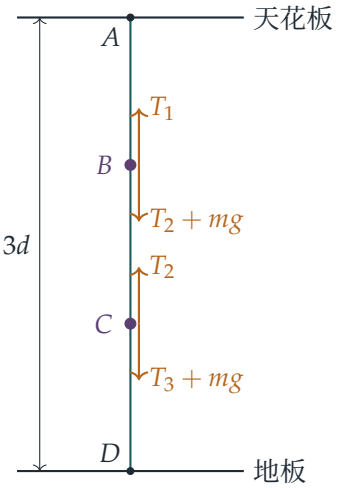
解答

模型

各弦线为轻质弹性弦线（light elastic string），拉长时遵从虎克定律（张力 $= \lambda \times$ 伸长量 $/a$）；各质点静止不动。设 T_1、T_2、T_3 为 AB、BC、CD 的张力（tension），x_1、x_2、x_3 为它们的伸长量（extension），于是 $T_i = \lambda x_i / a$。为方便起见，我们给单靠重量 mg 所产生的伸长量起一个名字：

$$e = \frac{mga}{\lambda}.$$

我们先假设三条弦线全部拉紧（taut），稍后再检查这在甚么情况下成立。设 y_B、y_C 为由地板量起的高度。



B 和 C 的高度

对每个质点沿铅垂方向分解力（上方的弦线向上拉，下方的弦线和重量向下拉）：

$$B: \quad T_1 = T_2 + mg, \qquad C: \quad T_2 = T_3 + mg.$$

两式除以 λ/a，便成为关于伸长量的关系式：

$$x_1 = x_2 + e, \qquad x_2 = x_3 + e, \qquad \text{所以} \qquad x_2 = x_3 + e, \quad x_1 = x_3 + 2e.$$

三条弦线的总长度就是房间的高度：

$$3a + x_1 + x_2 + x_3 = 3d \quad \Longrightarrow \quad 3x_3 + 3e = 3d - 3a \quad \Longrightarrow \quad x_3 = d - a - e.$$

于是 $x_2 = d - a$，$x_1 = d - a + e$。由下方各弦线的长度即可求得高度：

$$y_C = CD = a + x_3 = d - e = d - \frac{mga}{\lambda},$$
$$y_B = y_C + BC = (d - e) + (a + d - a) = 2d - \frac{mga}{\lambda}.$$

用 AB 验算一下：$3d - y_B = d + e = a + x_1$，正如所料。

想一想 这些答案究竟在甚么情况下才成立?

我们假设了每条弦线都拉紧，所以每个伸长量都必须至少为零。最严格的条件落在最低的弦线上：$x_3 \geq 0$，即

$$\frac{mga}{\lambda} \leq d - a.$$

（这时 $x_2 = d - a \geq 0$ 和 $x_1 > 0$ 自动成立。）CD 最先松弛（slack）是合理的：它不用支撑任何东西，只是靠房间把弦线拉开才保持拉紧。若 $mga/\lambda > d - a$，弦线 CD 便会松弛，

整个系统只不过是两个质点悬挂在 A 之下：这时 $T_2 = mg$，$T_1 = 2mg$，所以 $AB = a + 2e$，$BC = a + e$，从而 $y_B = 3d - a - 2e$，$y_C = 3d - 2a - 3e$，前提是这个位置仍在地板之上。题目所指的是所有弦线都拉紧的主要情况。

何时可以有 $CD = a$?

弦线 CD 的长度等于其自然长度（natural length），当且仅当它刚好拉紧而没有张力，即 $T_3 = 0$，亦即 $x_3 = 0$。这正是上述两种情况的分界，而用任何一组公式都可得

$$y_C = a \iff d - \frac{mga}{\lambda} = a \iff m = \frac{\lambda(d-a)}{ga}.$$

从物理上看，这时位于 C 的质点完全由 BC 支撑，$T_2 = mg$，而 $T_1 = 2mg$。

合适的质量存在，当且仅当这个 m 的值为正数，这需要 $d > a$。反过来说，若 $d \le a$，则没有任何正数 m 可行：假如所有弦线都拉紧，我们便需要 $x_2 = d - a \ge 0$ 和 $x_3 = d - a - e < 0$，这是不可能的，所以 CD 松弛，C 悬于高度 $3d - 2a - 3e < 3a - 2a = a$（或停在地板上），因此 $CD < a$。故所求的值的集合为

$$\{\, d : d > a \,\}.$$

对这样的 d，我们得到 $y_C = a$，$y_B = d + a$ 和 $AB = 2d - a$。

验算

- 单位：mga/λ 是力乘以长度再除以力，所以是长度；它要从 d 中减去，理应如此。
- 当 $m = 0$ 时，三条弦线平均分担伸长：每条的长度都是 d，C 位于 d，B 位于 $2d$。加上质量后，两个质点都下降相同的距离 e，因为 BC 的伸长量保持为 $d - a$。
- 数值上，对 250 组随机选取的 a、λ、d、m，在 $0 \le y_C \le y_B \le 3d$ 的范围内求位能（potential energy）的最小值（重力位能加弹性位能，并容许弦线松弛），所得高度在拉紧和 CD 松弛两种情况下都与上述结果吻合，误差在 10^{-14} 以内。取 $a = 1$、$\lambda = 10$、$d = 2$ 和 $m = \lambda(d-a)/(ga) \approx 1.020$，得出 $CD = 1.000000$ 和 $y_B = 3.000000$；当 $d \le a$ 时，没有任何正数 m 能使 $CD = a$。

常见错误

- 把张力写成 $\lambda\times$（拉长后的长度）$/a$，而不是 $\lambda\times$ 伸长量 $/a$。
- 忘记总长度由房间决定：没有 $\sum(a + x_i) = 3d$，单靠平衡方程并不能确定各伸长量。
- 假设每条弦线都必定有张力。弦线是可以松弛的，而 $CD = a$ 恰好发生在松弛的分界上。

STEP 之外

这是一个小型的静不定结构（statically indeterminate structure）：单靠质点的平衡并不能确定各张力，我们还需要一个相容条件（compatibility condition，即各长度之和固定）。同一个想法写成矩阵形式，就是工程师分析由弹簧和杆件组成的构架的方法。另一个切入点是求总位能的最小值，上面的数值验算正是这样做的；这种变分（variational）观点在往后的力学中占有核心地位。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对弹簧、平衡和位能有仔细的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。