详细解答

STEP I 1992，第 10 题

力学 · 反冲与动量

> **STEP I 1992，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q10

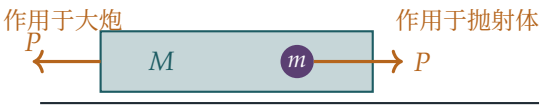
关键思路

力 P 把抛射体（projectile）向前推，但根据牛顿第三定律（Newton's third law），抛射体同时以同样大小的力 P 把大炮向后推，而水平方向上没有任何东西阻止大炮后座（recoil）。因此，抛射体在炮管内时，相对于地面走过的距离并不是 l：它是相对于大炮走过了 l。两个物体的加速度都是常数，所以最简洁的做法是考虑相对运动（relative motion）。

解答

模型

我们把抛射体和大炮都看成沿同一条水平直线运动的质点（particle），把地面看成光滑（大炮可“自由滑动”），并把抛射体与炮管之间沿炮管方向的力看成常数 P。在铅垂方向上，重量与法向反作用力（normal reaction）互相平衡（地面作用于大炮，炮管作用于抛射体），所以它们对水平运动没有影响。取发射方向为正方向。



两个加速度

抛射体在炮管内时，它所受的唯一水平力是向前的 P，而大炮所受的唯一水平力是向后的反作用力 P（牛顿第三定律；地面光滑）。根据牛顿第二定律（Newton's second law），两者的加速度为

$$a_{\text{proj}} = \frac{P}{m}, \qquad a_{\text{cannon}} = -\frac{P}{M}.$$

两者都是常数，而且两个物体都由静止开始运动。

> **想一想** 抛射体在多长的距离内加速：是 l，还是别的距离？

炮管的长度是 l，但炮管本身在向后移动。当抛射体相对于大炮的位移（displacement）达到 l 时，它便离开炮管。相对于大炮，抛射体由静止开始运动，其加速度为常数

$$a_{\text{rel}} = \frac{P}{m} - \left(-\frac{P}{M}\right) = \frac{P}{m} + \frac{P}{M} = \frac{P(M+m)}{mM}.$$

在炮管内的时间

对相对运动使用 $s = \frac{1}{2}at^2$，抛射体在时刻 T 离开炮管，其中

$$l = \frac{1}{2} \cdot \frac{P(M+m)}{mM} T^2, \qquad \text{所以} \qquad T^2 = \frac{2mMl}{P(M+m)}.$$

出口速率

相对于地面，抛射体由静止开始以恒加速度 P/m 运动，所以在时刻 T 它的速率 v 满足

$$\begin{aligned} v^2 = \left(\frac{P}{m}T\right)^2 &= \frac{P^2}{m^2} \cdot \frac{2mMl}{P(M+m)} \\ &= \frac{2PMl}{m(M+m)}. \end{aligned}$$

由于 $v > 0$,

$$v = \sqrt{\frac{2PMl}{m(M+m)}},$$

这正是所求的结果。

另一途径：能量与动量

利用守恒定律（conservation laws）也可得到同一答案。水平方向上没有外力，所以水平动量（momentum）守恒：若抛射体离开炮管的一刻大炮向后的速率为 V，则 $mv = MV$。若抛射体在炮管内的期间，抛射体向前移动了 x，大炮向后移动了 X，则 $x + X = l$。作用于抛射体的力所作的功（work）为 Px，而作用于大炮的反作用力与大炮的运动方向相同，所作的功为 PX；两者合共作功 $P(x+X) = Pl$。因此

$$Pl = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}M\left(\frac{mv}{M}\right)^2 = \tfrac{1}{2}mv^2\,\frac{M+m}{M},$$

由此同样得到 $v^2 = \dfrac{2PMl}{m(M+m)}$。

验算

- 重型大炮：当 $M \to \infty$ 时，因子 $M/(M+m) \to 1$，而 $v \to \sqrt{2Pl/m}$，即大炮固定不动时的速率（所作的功 Pl 全部归于抛射体）。大炮后座时，所得的速率总会略小一些，这是理所当然的，因为部分能量用于后座。
- 单位：Pl 是能量，而 Pl/m 的单位是 $\mathrm{m^2\,s^{-2}}$，所以 v 是速率。
- 数值：取 $m = 0.1$、$M = 0.9$、$P = 9$ 及 $l = 0.5$（国际单位制，SI units），公式给出 $v = 9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$，而大炮以 $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 后座。于是动量为 $0.1 \times 9 = 0.9 \times 1$，动能（kinetic energy）为 $4.05 + 0.45 = 4.5 = Pl$。对两个物体作逐步数值模拟，在两者的相对位移达到 l 时停止，所得结果在 m、M、P 和 l 取多组随机数值时均与公式吻合。

常见错误

- 使用 $v^2 = 2(P/m)l$，即把 l 当作抛射体相对于地面走过的距离，忽略了后座。
- 忘记牛顿第三定律，让大炮保持静止；大炮可自由滑动，所以必定后座。
- 使用能量方法时，只把所作的功取为 P 乘以抛射体相对于地面的位移；其实作用于大炮的反作用力也有作功。

STEP 之外

这是一个二体问题（two-body problem），而相对加速度 $P(M+m)/(mM)$ 正是 P 除以约化质量（reduced mass）$\mu = mM/(m+M)$。任何两个只与对方相互作用的物体，彼此之间的相对运动都如同一个质量为 μ 的单一物体；同一想法可用来处理行星轨道、双星和粒子碰撞，也是火箭问题和后座问题的基础。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对这里的约化质量和动量两方面的想法都有详细阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。