详细解答

STEP I 1992，第 1 题

纯数学 • 模 7 的日历算术

> **STEP I 1992，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/92-s1-q1

关键思路

星期每 7 日循环一次，所以我们只需要知道两个日期之间相隔多少日，再取模（modulo）7 的余数。令计算变得轻松的窍门是 $365 = 52 \times 7 + 1$：平年会令星期向后移一日，闰年（leap year）则移两日。因此我们先数整年和闰日，最后才处理余下的零碎月份。所谓“仔细”，是指要准确判断哪些 2 月 29 日真正落在这段期间之内，并留意那个可能令我们出错的世纪年。

解答

我们把 1905 年 4 月 3 日至 1992 年 6 月 26 日这段期间分成两段：

$$1905\text{ 年 }4\text{ 月 }3\text{ 日} \longrightarrow 1992\text{ 年 }4\text{ 月 }3\text{ 日} \longrightarrow 1992\text{ 年 }6\text{ 月 }26\text{ 日}.$$

整年：1905 年 4 月 3 日至 1992 年 4 月 3 日

这段时间共有 $1992 - 1905 = 87$ 个整年。每个这样的年份（由 4 月 3 日至下一个 4 月 3 日）有 365 日，若当中包含一个 2 月 29 日，则多加一日。

哪些 2 月 29 日落在 1905 年 4 月 3 日与 1992 年 4 月 3 日之间？这个范围内的闰年就是可被 4 整除的年份，即

$$1908,\ 1912,\ \ldots,\ 1988,\ 1992.$$

1904 年的 2 月 29 日在 1905 年 4 月 3 日之前，所以不计算在内；1992 年的 2 月 29 日在 1992 年 4 月 3 日之前，所以要计算在内。于是共有

$$\frac{1992 - 1908}{4} + 1 = 21 + 1 = 22$$

个闰日。

> **想一想** 这个范围内每个可被 4 整除的年份，真的都是闰年吗?

在格里历（Gregorian calendar）中，世纪年只有在可被 400 整除时才是闰年，所以 1900 年不是闰年（而 2000 年是）。不过这两个年份都不在我们的期间之内，所以简单的“可被 4 整除”法则（即口诀中的那一条）在这里完全正确。假如题目追溯到 1900 年之前，我们便要剔除 1900 年 2 月 29 日。

因此，由 1905 年 4 月 3 日至 1992 年 4 月 3 日的日数是

$$87 \times 365 + 22 = 31\,755 + 22 = 31\,777.$$

以模 7 计算会更快：由于 $365 \equiv 1 \pmod 7$，这个数等于

$$87 + 22 = 109 = 15 \times 7 + 4 \equiv 4 \pmod 7.$$

零碎月份：1992 年 4 月 3 日至 1992 年 6 月 26 日

根据口诀，四月有 30 日，五月有 31 日，所以

$$\begin{aligned} &4\text{ 月 }3\text{ 日} \to 5\text{ 月 }3\text{ 日}: 30\text{ 日},\\ &5\text{ 月 }3\text{ 日} \to 6\text{ 月 }3\text{ 日}: 31\text{ 日},\\ &6\text{ 月 }3\text{ 日} \to 6\text{ 月 }26\text{ 日}: 23\text{ 日}, \end{aligned}$$

合共 $30 + 31 + 23 = 84 = 12 \times 7$ 日，即 $\equiv 0 \pmod 7$。可喜的是，1992 年 4 月 3 日与 1992 年 6 月 26 日恰好是同一个星期几。

综合结果

总相隔日数为

$$31\,777 + 84 = 31\,861 = 4551 \times 7 + 4\text{ 日},$$

所以 1905 年 4 月 3 日在星期的次序上比 1992 年 6 月 26 日早 4 日。由星期五倒数四日：星期四、星期三、星期二、星期一。因此

$$1905\text{ 年 }4\text{ 月 }3\text{ 日是星期一。}$$

验算

- 用电脑逐月直接计算两个日期之间的日数，得出 31 861 日，即 $4 \pmod 7$；电脑日历亦显示 1905 年 4 月 3 日是星期一（而 1992 年 6 月 26 日是星期五）。

- 检查方向是否合理：由星期一向前数 4 日得到星期五，正如所料。
- 用另一个方法核对闰日数目：87 年大约包含 $87/4 \approx 21.75$ 个闰日，所以 22 大致正确。

常见错误

- 把 1904 年 2 月 29 日（在起始日期之前）计算在内，或漏掉 1992 年 2 月 29 日（在结束日期之前）：两者都会令答案相差一日。
- 应该向前数时倒数，或应该倒数时向前数：余数 4 表示在星期的循环中，1905 年那一天是在星期五之前四日，而不是之后。
- 把这个方法推广到更早的日期时，将 1900 年当作闰年。

STEP 之外

这就是模 7 的算术：关键事实 $365 \equiv 1 \pmod 7$ 把一个庞大的数目化为一个细小的数目。同余（congruence），以及它在历法谜题中的应用，例如用来求任何日期是星期几的蔡勒公式（Zeller's congruence），都是数论（number theory）入门课程的标准内容。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（数论入门名著）是一本介绍同余及其他众多课题的佳作。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。