详细解答

STEP III 1991，第 9 题

纯数学 · 椭圆的弧长

> **STEP III 1991，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q9

关键思路

E_1 是以中心为原点的椭圆（ellipse）方程，而 E_2 是同一条曲线的极坐标（polar）形式，极点位于一个焦点（focus）。把 E_2 化为直角坐标（Cartesian）形式再配方（completing the square），便可看出它的中心和轴在哪里；比较两者的半轴（semi-axes）即可求得 k 和 b。至于积分，周界（perimeter）只是一个数，但每一种参数化（parametrisation）都会给出外表不同的弧长（arc length）积分。

解答

坐标轴、k 和 b

以 (x,y) 表示 E_2 的坐标，并设 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=\theta_2$。于是 E_2 即 $r=\dfrac{k}{1+e\cos\theta}$，亦即 $r+er\cos\theta=k$，所以

$$r=k-ex.$$

两边平方（这一步没有损失任何资料，因为在曲线上 $r=k/(1+e\cos\theta)>0$），

$$x^2+y^2=k^2-2kex+e^2x^2 \quad\Longrightarrow\quad (1-e^2)x^2+2kex+y^2=k^2.$$

对 x 配方：

$$(1-e^2)\left(x+\frac{ke}{1-e^2}\right)^2+y^2=k^2+\frac{k^2e^2}{1-e^2}=\frac{k^2}{1-e^2},$$

所以

$$\frac{\left(x+\frac{ke}{1-e^2}\right)^2}{k^2/(1-e^2)^2}+\frac{y^2}{k^2/(1-e^2)}=1.$$

这是一个椭圆，在 E_2 坐标轴下中心为 $(-\frac{ke}{1-e^2}, 0)$，对称轴与 E_2 的坐标轴平行，半轴为

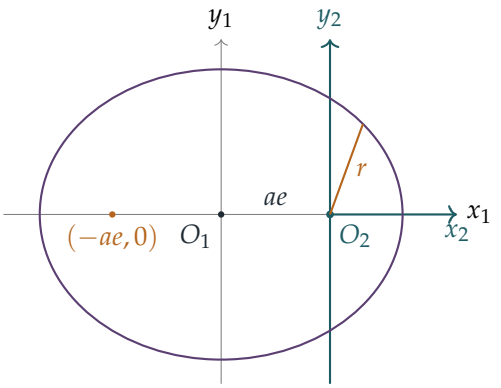
$$A = \frac{k}{1-e^2}\text{（沿 } x \text{ 方向）}, \qquad B = \frac{k}{\sqrt{1-e^2}}\text{（沿 } y \text{ 方向）}.$$

由于 $0 < 1-e^2 < 1$，我们有 $A > B$，所以长轴（major axis）位于 E_2 的 x 轴上。对于 E_1，$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 且 $a > b$，所以它的长轴位于 E_1 的 x 轴上。两条曲线是同一条曲线，所以半长轴相等，半短轴也相等：

$$a = \frac{k}{1-e^2}, \quad \text{即} \quad k = a(1-e^2), \qquad b^2 = \frac{k^2}{1-e^2} = \frac{a^2(1-e^2)^2}{1-e^2} = a^2(1-e^2),$$

这正是所需的两个结果。

中心（即 E_1 的原点）位于 E_2 的 x 轴上 $x = -\frac{ke}{1-e^2} = -ae$ 之处。所以 E_2 的坐标轴就是把 E_1 的坐标轴沿长轴平移距离 ae 而得：E_2 的原点是 E_1 中的点 $(ae, 0)$，而由于 $a^2 - b^2 = a^2e^2$，这一点正是焦点。两条 x 轴位于同一条直线（长轴）上，两条 y 轴互相平行；以 E_1 的坐标表示，$x_1 = x_2 + ae$，$y_1 = y_2$。椭圆对它的两条轴都对称，所以我们同样可以把 E_2 的原点取在另一个焦点 $(-ae, 0)$，并把 x 轴反向。无论哪一种取法，$\theta_2 = 0$ 所对应的点都是最接近该焦点的顶点（vertex）。



两个积分

我们用两种方法计算椭圆上半部分（$y \geq 0$）的长度。

利用 E_1。当 θ_1 由 0 变到 π 时，动点刚好走遍上半部分一次。由 $\dot{x} = -a\sin\theta_1, \dot{y} = b\cos\theta_1$，

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = a^2\sin^2\theta_1 + b^2\cos^2\theta_1 = a^2 - (a^2-b^2)\cos^2\theta_1 = a^2\left(1 - e^2\cos^2\theta_1\right),$$

其中用到 $a^2 - b^2 = a^2e^2$。所以半周界为

$$\tfrac{1}{2}P = a\int_0^\pi \sqrt{1 - e^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

利用 E_2。这里由于 $r>0$，$y_2 = r\sin\theta_2 \geq 0$ 当且仅当 $0 \leq \theta_2 \leq \pi$。所以 $\theta_2 \in [0,\pi]$ 同样刚好描出上半部分一次。在极坐标中，$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$。由 $r = k(1+e\cos\theta)^{-1}$，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{ke\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2},$$

所以

$$r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{k^2\left[(1+e\cos\theta)^2 + e^2\sin^2\theta\right]}{(1+e\cos\theta)^4} = \frac{k^2\left(1+e^2+2e\cos\theta\right)}{(1+e\cos\theta)^4}.$$

因此，利用 $k = a(1-e^2)$，

$$\tfrac{1}{2}P = a(1-e^2)\int_0^\pi \frac{\sqrt{1+e^2+2e\cos\theta}}{(1+e\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

令 $\frac{1}{2}P$ 的两个表达式相等，再除以 $a>0$，便得到所需的恒等式（identity）。

想一想 为甚么两个参数都必须取遍 $[0,\pi]$，而不是其中一个取另一个范围?

两个弧长必须是同一段曲线的长度。θ_1 和 θ_2 是不同的角（一个是从中心量度的离心角（eccentric angle），另一个是从焦点量度的极角），但两者在 $[0,\pi]$ 上都是由右顶点 $(a,0)$ 到左顶点 $(-a,0)$ 扫过上半部分。所以两个积分量度的是同一段弧。

近似值

由于 $0 \leq e^2\cos^2\theta < 1$，二项级数（binomial series）适用：

$$\sqrt{1-u} = 1 - \tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{8}u^2 + O(u^3), \qquad u = e^2\cos^2\theta.$$

$O(u^3)$ 项是 $O(e^6)$，我们把它略去。利用

$$\int_0^\pi \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{8}$$

（第二个由 $\cos^4\theta = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta$ 得出），我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta &\approx \pi - \frac{e^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{e^4}{8}\cdot\frac{3\pi}{8} = \pi\left(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64}\right)\\ &= \tfrac{1}{64}\pi\left(64 - 16e^2 - 3e^4\right).\end{aligned}$$

根据刚证明的恒等式，第二个积分的值相同。至此全题完成。

验算

▶ 当 $e=0$ 时，两个积分都等于 π，而 E_2 变成圆 $r=k$，其中 $k=a$：正确。

- 取 $a = 2$，$b = 1$（所以 $e^2 = \frac{3}{4}$），用一个 200 000 边形计算，得周界为 9.6884482，与 $2a$ 乘以第一个积分的值吻合。
- 数值上，当 $e = 0.2$ 时两个积分都是 3.1099371，而近似式给出 3.1099411。两者之差约为 $-0.063e^6$，与级数的下一项 $-\frac{5\pi}{256}e^6 \approx -0.061e^6$ 相符。

常见错误

- 把 E_2 的原点放在中心。分母为 $1 + e\cos\theta$ 的极坐标形式，极点必定在焦点。
- 在极坐标弧长公式中漏掉 $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta)^2$ 一项，或者一边在 $[0, 2\pi]$ 上积分，另一边却在 $[0, \pi]$ 上积分。

STEP 之外

积分 $\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$ 是第二类完全椭圆积分（complete elliptic integral of the second kind）$E(e)$，所以椭圆的周界是 $4aE(e)$。它不能用初等函数（elementary functions）表示，这正是本题这类级数（以及拉马努金（Ramanujan）那些准确得惊人的近似公式）之所以重要的原因。由椭圆积分再走下去，便是椭圆函数（elliptic functions）和椭圆曲线（elliptic curves），后者是现代数论的核心课题。想做更多这种风格的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。