详细解答

STEP III 1991，第 8 题

纯数学 · 归约公式与求和

> **STEP III 1991，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q8

关键思路

第 (i) 部分是一条归约公式（reduction formula），所以分部积分法（integration by parts）自然是第一步。余下的被积函数（integrand）含有 $\sin x \sin kx$，而 $\cos(k-1)x$ 的复角公式（compound-angle formula）可把它变回同一族的积分。第 (ii) 部分是 $(1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^m$ 的二项展开式（binomial expansion）的实部（real part）。第 (iii) 部分则是把 (ii) 积分，再以裂项相消（telescoping）的方法把 (i) 的递推关系（recurrence）逐层展开而得出。

解答

第 (i) 部分

取 $k \geq 1$，并以 $u = \cos^k x$ 和 $\mathrm{d}v = \cos kx\,\mathrm{d}x$ 作分部积分，于是 $v = \frac{1}{k}\sin kx$ 及 $\mathrm{d}u = -k\cos^{k-1}x \sin x\,\mathrm{d}x$：

$$\begin{aligned} I_k &= \left[\tfrac{1}{k}\cos^k x \sin kx\right]_0^\theta + \int_0^\theta \cos^{k-1} x\, \sin x\, \sin kx\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{k}\cos^k\theta \sin k\theta + \int_0^\theta \cos^{k-1} x\, \sin x\, \sin kx\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

因为方括号内的式子在 $x = 0$ 时等于零。

> **想一想** 怎样把 $\sin x \sin kx$ 改写成 x 的倍数的余弦?

把 $(k-1)x = kx - x$ 代入复角公式，得

$$\cos(k-1)x = \cos kx \cos x + \sin kx \sin x,$$

所以

$$\sin x \sin kx = \cos(k-1)x - \cos x \cos kx.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_0^\theta \cos^{k-1} x \, \sin x \, \sin kx \, \mathrm{d}x &= \int_0^\theta \cos^{k-1} x \cos(k-1)x \, \mathrm{d}x \\ &\quad - \int_0^\theta \cos^k x \cos kx \, \mathrm{d}x \\ &= I_{k-1} - I_k.\end{aligned}$$

代回原式并乘以 k，

$$kI_k = \cos^k \theta \sin k\theta + kI_{k-1} - kI_k,$$

即

$$2kI_k = kI_{k-1} + \cos^k \theta \sin k\theta,$$

这正是所要证明的结果。

第 (ii) 部分

设 $z = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$。根据二项式定理（binomial theorem），

$$\begin{aligned}(1+z)^m &= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} z^r \\ &= \sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} (\cos 2r\theta + \mathrm{i} \sin 2r\theta).\end{aligned}$$

现在把“半角”抽出来：

$$1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 2\cos\theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

所以

$$(1+z)^m = 2^m \cos^m \theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta} = 2^m \cos^m \theta \, (\cos m\theta + \mathrm{i} \sin m\theta).$$

由于 $2^m \cos^m \theta$ 是实数，比较两个表达式的实部，得

$$\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} \cos 2r\theta = 2^m \cos^m \theta \cos m\theta,$$

这就是所求的恒等式（$r = 0$ 和 $r = m$ 两项分别是 1 和 $\cos 2m\theta$）。

第 (iii) 部分

把第一个表达式记作 S。(ii) 的右边是 I_m 的被积函数的 2^m 倍，所以我们把 (ii) 由 0 积分至 θ。$r = 0$ 一项积分后得 θ，而当 $r \geq 1$ 时，$\int_0^\theta \cos 2rx \, \mathrm{d}x = \frac{\sin 2r\theta}{2r}$。因此

$$\theta + \sum_{r=1}^{m} \binom{m}{r} \frac{\sin 2r\theta}{2r} = 2^m I_m, \qquad \text{所以} \qquad S = 2^m I_m - \theta.$$

现在利用 (i) 计算 $2^m I_m$。把递推关系除以 $2k$ 再乘以 2^k，对 $k \geq 1$ 得

$$2^k I_k = 2^{k-1} I_{k-1} + \frac{2^{k-1}}{k} \cos^k \theta \sin k\theta.$$

想一想 为甚么要乘以 2^k?

若写成 $I_k = \frac{1}{2} I_{k-1} + \ldots$，递推关系每一步都带有因子 $\frac{1}{2}$。改用 $J_k = 2^k I_k$ 便可把它消去：这样 $J_k - J_{k-1}$ 就是一个简单的显式项，而求和时会裂项相消。把 $k = 1, 2, \ldots, m$ 的各条等式相加，中间各项互相抵消：

$$2^m I_m = 2^0 I_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{2^{k-1}}{k} \cos^k \theta \sin k\theta.$$

最后，$I_0 = \int_0^\theta 1 \, \mathrm{d}x = \theta$，所以

$$\begin{aligned} S = 2^m I_m - \theta &= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} 2^{k-1} \cos^k \theta \sin k\theta \\ &= \cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta \sin 2\theta + \cdots + \frac{1}{m} 2^{m-1} \cos^m \theta \sin m\theta, \end{aligned}$$

这就是所求的结果。

验算

- $m = 1$：所要证明的是 $\frac{1}{2} \sin 2\theta = \cos\theta \sin\theta$，这正是二倍角公式（double-angle formula）。
- $m = 2$：左边是 $\sin 2\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta$，而右边是 $\cos\theta \sin\theta + \cos^2\theta \sin 2\theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta (1 + \cos 2\theta)$，两者相同，因为 $\sin 2\theta \cos 2\theta = \frac{1}{2} \sin 4\theta$。
- 数值上，取 $m = 5$ 和 $\theta = 0.7$，两个表达式都等于 1.51963（准确至小数点后 5 位）。对随机选取的 k 和 θ，归约公式亦与用辛普森法则（Simpson's rule）算出的 I_k 值吻合。

常见错误

- 分部积分时弄错正负号：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos^k x = -k \cos^{k-1} x \sin x$，而这个负号会与 $\int v \, \mathrm{d}u$ 前面的负号互相抵消。
- 忘记 (ii) 中 $r = 0$ 的一项。它积分后得 θ，并与裂项求和最底端的 $I_0 = \theta$ 互相抵消。

STEP 之外

把 $\cos^m\theta\cos m\theta$ 写成 $\cos 2r\theta$ 的组合，其实就是计算一个傅里叶级数（Fourier series）。这里的级数只有有限项，而逐项积分正是大学一年级数学方法课程中处理傅里叶级数的做法。(i) 中那类归约公式，也是处理 $\int\cos^n x\,\mathrm{d}x$ 这种形式的积分以及沃利斯乘积（Wallis product）的标准工具。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 为 (ii) 中用到的技巧 $1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}=2\cos\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 提供了一幅几何图像。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。