详细解答

STEP III 1991，第 7 题

纯数学 · 利用对称性积分

> **STEP III 1991，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q7

关键思路

$\ln(\sin x)$ 的积分无法通过原函数（antiderivative）求出，但对称性（symmetry）足以解决一切。代换（substitution）$x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$ 会把 sin 与 cos 互换，而 $x \mapsto \pi - x$ 则说明 $\sin x$ 在 $[0, \pi]$ 上的取值，正是它在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上的取值重复两次。再写出 $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$，便得到一条未知积分必须满足的方程。第 (iii) 部分是一次分部积分（integration by parts），把 $x \cot x$ 化为 $\ln(\sin x)$，而第 (ii) 部分则用来处理边界项（boundary term）。

解答

全题记

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

第 (i) 部分

正弦与余弦的积分相等。代入 $x = \frac{1}{2}\pi - t$，则 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$ 且 $\sin x = \cos t$。积分上下限 $0, \frac{1}{2}\pi$ 变成 $\frac{1}{2}\pi, 0$，而负号又把它们调换回来：

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{0} \ln(\cos t)\,(-\mathrm{d}t) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t.$$

与 $\sin 2x$ 的关系。把这两个相等的积分相加，并利用 $\ln a + \ln b = \ln(ab)$（由于在开区间

上 $\sin x, \cos x > 0$，此式成立）：

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x \cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\tfrac{1}{2}\sin 2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \tfrac{1}{2}\pi \ln 2. \end{aligned}$$

两边除以二，得 $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\pi \ln 2$，第一串等式至此证毕。

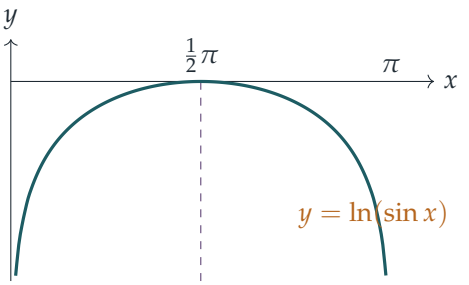
第二串等式。设 $u = 2x$，则 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$，而积分上下限变成 0 和 π：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u.$$

现在把 $[0, \pi]$ 在 $\frac{1}{2}\pi$ 处分成两段。在后半段代入 $u = \pi - v$。由于 $\sin(\pi - v) = \sin v$，而积分上下限 $\frac{1}{2}\pi, \pi$ 变成 $\frac{1}{2}\pi, 0$，

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin v)\,\mathrm{d}v = I.$$

下图显示了这种对称性：曲线 $y = \ln(\sin x)$ 关于 $x = \frac{1}{2}\pi$ 对称。



所以 $\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = 2I$，因此

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(2I) = I,$$

正如所求。

计算 I。把第二个结果代入第一个结果，得

$$I = \tfrac{1}{2}I - \tfrac{1}{4}\pi \ln 2 \quad \Longrightarrow \quad I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{2}\pi \ln 2.$$

这一步需要 I 是一个有限的数，这正是题目容许我们假设积分收敛（convergence）的原因。若没有这个假设，“$I = \frac{1}{2}I + c$”甚么也证明不了。

第 (ii) 部分

设 $x \geq 1$，并取 $u = \sqrt{x}$。则 $u \geq 1$，所以题目给出的不等式适用：

$$\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}, \qquad \text{即} \qquad \tfrac{1}{2} \ln x < \sqrt{x}.$$

第一个极限（limit）。当 $x \geq 1$ 时，我们有 $\ln x \geq 0$，而把 $\ln x < 2\sqrt{x}$ 除以 $x > 0$ 可得

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

当 $x \to \infty$ 时,右边趋向 0,所以根据夹逼原理(squeeze principle,又称 sandwich principle),$\dfrac{\ln x}{x} \to 0$。

第二个极限。当 $0 < x < 1$ 时，设 $x = 1/t$，则 $t > 1$，且当 $x \to 0^+$ 时 $t \to \infty$。于是根据第一个极限,

$$x \ln x = \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} = -\frac{\ln t}{t} \to 0$$

。所以当 $x \to 0$（只取正值）时，$x \ln x \to 0$。

第 (iii) 部分

首先留意被积函数（integrand）在 0 处并无问题：$x \cot x = \dfrac{x}{\sin x} \cos x \to 1$。由于在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上 $\cot x$ 是 $\ln(\sin x)$ 的导数，我们取 $u = x$ 和 $\mathrm{d}v = \cot x \, \mathrm{d}x$，$v = \ln(\sin x)$ 作分部积分。对数在 0 处趋向无穷，所以我们先在 $[\varepsilon, \frac{1}{2}\pi]$ 上计算，然后令 $\varepsilon \to 0^+$：

$$\int_\varepsilon^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x = \Big[x \ln(\sin x) \Big]_\varepsilon^{\frac{1}{2}\pi} - \int_\varepsilon^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x) \, \mathrm{d}x.$$

在上限处，$\ln(\sin \frac{1}{2}\pi) = \ln 1 = 0$。所以边界项只剩下 $-\varepsilon \ln(\sin \varepsilon)$。

? **想一想** 为甚么 $\varepsilon \ln(\sin \varepsilon)$ 趋向 0?第 (ii) 部分讨论的是 $x \ln x$,而不是 $x \ln(\sin x)$。

记 $s = \sin \varepsilon$，当 $\varepsilon \to 0^+$ 时，它取正值而趋向 0。于是

$$\varepsilon \ln(\sin \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\sin \varepsilon} \cdot s \ln s.$$

第一个因子趋向 1（即标准极限 $\sin \varepsilon / \varepsilon \to 1$），而根据第 (ii) 部分，$s \ln s \to 0$。所以边界项趋向 0。

令 $\varepsilon \to 0^+$，并利用第 (i) 部分：

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x = 0 - I = \tfrac{1}{2}\pi \ln 2.$$

验算

- 正负号：在该区间上 $\ln(\sin x) \le 0$，所以 I 必为负数，而 $-\frac{1}{2}\pi \ln 2 \approx -1.0888$ 的确是负数。另一方面，在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上 $x \cot x > 0$，而我们的答案是正数。
- 大小：$x \cot x$ 在长度为 $\frac{1}{2}\pi \approx 1.571$ 的区间上由 1 下降至 0，所以积分值约为 1.09 是合理的。
- 数值上，以中点求积法（midpoint quadrature）计算可得 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} x \cot x \, \mathrm{d}x \approx 1.0887930$，与 $\frac{1}{2}\pi \ln 2 = 1.0887930\ldots$ 吻合，并且 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin x) \, \mathrm{d}x \approx -1.08879$。

常见错误

- 转换为 $u = 2x$ 时，漏掉由 $\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$ 而来的因子 $\frac{1}{2}$，结果得出 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \ln(\sin 2x) \, \mathrm{d}x = 2I$，之后便无从入手。
- 在第 (iii) 部分，直接写 $[x \ln(\sin x)]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 0$，却没有论证在 0 处的极限。第 (ii) 部分正是为了求这个极限而设。

STEP 之外

这里的两个积分都是瑕积分（improper integral）：它们的被积函数，或所用的原函数，在某个端点处无界。这类积分是以极限来定义的，正如我们利用 ε 所做的那样。大学第一门分析（analysis）课程会把这一点严格化，并给出判别这类极限何时存在的方法。题目中“可假设”那一句的背后，正是这些判别法。同样的对称技巧还可以求出许多其他积分，例如 $\int_0^{\pi/2} \ln(\tan x) \, \mathrm{d}x = 0$。Abbott 的 *Understanding Analysis* 讲述了支撑这一切的极限与积分理论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。