详细解答

STEP III 1991，第 6 题

纯数学 · 双曲线性变换

STEP III 1991，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s3-q6

本题在 *Beyond STEP* 第 7.6 节双曲旋转与相对论中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/hyperbolic-rotations.html

关键思路

这个矩阵（matrix）的表现与旋转矩阵（rotation matrix）相似，只是以双曲函数（hyperbolic functions）取代了圆函数，而恒等式 $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ 以及 cosh 和 sinh 的加法公式（addition formulae）就足以完成全部工作。把斜率（gradient）为 $\tanh v$ 的方向写成向量 $(\cosh v, \sinh v)$，T 对斜率的作用便一目了然：它只是把 u 加到“双曲角”v 上。至于夹角的条件，我们把两条直线夹角的正切用 v_1 和 v_2 表示，再看看甚么必须保持不变。

解答

全篇记 $c = \cosh u$ 及 $s = \sinh u$，于是 $c^2 - s^2 = 1$，而且因为 $u > 0$，所以 $s > 0$。这个变换（transformation）是

$$x' = cx + sy, \qquad y' = sx + cy.$$

双曲线

对任意一点，

$$\begin{aligned} x'^2 - y'^2 &= (cx + sy)^2 - (sx + cy)^2 \\ &= (c^2 - s^2)x^2 + 2csxy - 2csxy - (c^2 - s^2)y^2 \\ &= x^2 - y^2. \end{aligned}$$

所以 T 保持 x^2-y^2 不变，而 $x^2-y^2=1$ 上的每一点都被送到 $x^2-y^2=1$ 上的一点。整条曲线都被完全覆盖，而不仅是被映射到自身之内：把 u 换成 $-u$ 所得的矩阵是 T 的逆矩阵（inverse）（乘开并利用 $c^2-s^2=1$ 即可），而它同样保持 x^2-y^2 不变。所以双曲线（hyperbola）上的每一点都是双曲线上某一点的像（image）。这条曲线变换为自身。

（事实上每一支都变换为自身：若 $x\geq 1$，则 $|y|<x$，所以 $x'=cx+sy>(c-s)x=\mathrm{e}^{-u}x>0$。）

通过原点的不变直线

由于 T 是线性（linear）的，它把原点送到原点，并把通过原点、方向为 $\mathbf{d}$ 的直线送到通过原点、方向为 $T\mathbf{d}$ 的直线。所以我们需要 $T\mathbf{d}$ 平行于 $\mathbf{d}$，即 $\mathbf{d}$ 是特征向量（eigenvector）。试取 $\mathbf{d}=(1,m)$：

$$T\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c+sm\\s+cm\end{pmatrix},$$

它平行于 $(1,m)$ 当且仅当 $s+cm=m(c+sm)$，即 $s(1-m^2)=0$。由于 $s\neq 0$，故 $m=\pm 1$。（铅垂方向 $(0,1)$ 被送到 (s,c)，后者并非铅垂，所以不会得出新的直线。）这两条直线是

$$\boxed{y=x\quad\text{及}\quad y=-x}$$

而事实上 $T(1,1)=\mathrm{e}^{u}(1,1)$ 及 $T(1,-1)=\mathrm{e}^{-u}(1,-1)$。它们正是双曲线的渐近线（asymptotes），这与双曲线映射到自身的结果吻合。

斜率：$v'=v+u$

取一条通过点 $\mathbf{p}$、方向为 $\mathbf{d}$ 的直线，其上的点为 $\mathbf{p}+t\mathbf{d}$。由线性可知它的像是 $T\mathbf{p}+tT\mathbf{d}$：一条通过 $T\mathbf{p}$、方向为 $T\mathbf{d}$ 的直线。所以直线的位置无关重要，只有方向才有影响。

斜率为 $\tanh v$ 的直线，方向为 $(1,\tanh v)$，或者乘以 $\cosh v>0$ 后，方向为 $(\cosh v,\sinh v)$。于是由加法公式，

$$T\begin{pmatrix}\cosh v\\\sinh v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh u\cosh v+\sinh u\sinh v\\\sinh u\cosh v+\cosh u\sinh v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cosh(u+v)\\\sinh(u+v)\end{pmatrix}$$

因此像直线的斜率为 $\tanh(v+u)$。由于 $\tanh$ 是一对一（one-to-one）的，$\tanh v'=\tanh(v+u)$ 给出

$$v'=v+u,$$

这正是所要证明的。（只有斜率严格介乎 -1 与 1 之间的直线才可以这样表示，这就是题目采用 $\tanh v$ 的原因。）

相等的夹角

若两条直线的斜率为 m_1 和 m_2，且 $1+m_1m_2\neq 0$，则它们之间的锐角 θ 满足

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|.$$

这里 $|m_1|,|m_2|<1$，所以 $1+m_1m_2>0$：两条直线永不互相垂直，$\theta\in[0,\frac{\pi}{2})$，而且 θ 由 $\tan\theta$ 唯一决定。

> **想一想** 这条公式看来很像 $\tanh(v_1-v_2)$，但分母的正负号不对。那么它实际上化简成甚么?

代入 $m_i=\tanh v_i$，并把分子和分母同乘以 $\cosh v_1\cosh v_2>0$：

$$\tan\theta=\frac{|\sinh v_1\cosh v_2-\cosh v_1\sinh v_2|}{\cosh v_1\cosh v_2+\sinh v_1\sinh v_2}=\frac{|\sinh(v_1-v_2)|}{\cosh(v_1+v_2)}.$$

变换后的直线有 $v_i'=v_i+u$。它们的差不变，但它们的和增加了 $2u$，所以它们之间的夹角 θ' 满足

$$\tan\theta'=\frac{|\sinh(v_1-v_2)|}{\cosh(v_1+v_2+2u)}.$$

要 ℓ_1 和 ℓ_2 相交，必须有 $v_1\neq v_2$，所以分子不是零。因此

$$\theta=\theta'\iff\cosh(v_1+v_2)=\cosh(v_1+v_2+2u).$$

由于 $\cosh a=\cosh b$ 当且仅当 $a=\pm b$，这表示要么 $v_1+v_2=v_1+v_2+2u$，但因为 $u>0$，这不可能；要么 $v_1+v_2=-(v_1+v_2+2u)$。所以充分必要条件（necessary and sufficient condition）是

$$\boxed{v_1+v_2=-u}$$

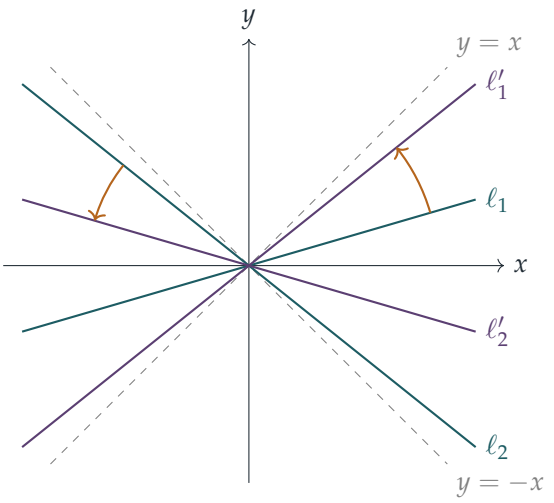
或等价地 $v_1'+v_2'=u$。

两条直线相交于原点时的图像

当 $v_1+v_2=-u$ 时，我们有

$$v_1'=v_1+u=-v_2,\qquad v_2'=v_2+u=-v_1.$$

所以 ℓ_1' 的斜率为 $-\tanh v_2$：它是 ℓ_2 对 x 轴的反射（reflection）。同样，ℓ_2' 是 ℓ_1 的反射。若两条直线通过原点，变换后的一对直线就只是原来那一对对 x 轴的镜像，这就是它们之间的夹角相同的原因。图中采用 $u=0.8$、$v_1=0.3$、$v_2=-1.1$：ℓ_1,ℓ_2 的斜率约为 0.29 和 -0.80，而 ℓ_1',ℓ_2' 的斜率约为 0.80 和 -0.29。每条直线都转向 $y=x$，即被 T 拉伸的那条不变直线。



蓝绿色的直线是 ℓ_1, ℓ_2，紫红色的直线是它们的像；琥珀色的箭头显示 $\ell_1 \to \ell_1'$ 和 $\ell_2 \to \ell_2'$。紫红色的一对是蓝绿色的一对对 x 轴的反射。

验算

- 取 $u = 0.8$、$v_1 = 0.3$、$v_2 = -1.1$，ℓ_1 与 ℓ_2 之间的夹角以及它们的像之间的夹角，数值上都是 $54.92°$。把 v_2 稍作改动，两个夹角便不再相等。
- 当 $u \to 0$ 时，T 变成恒等变换（identity），条件变成 $v_1 + v_2 = 0$：两条直线对 x 轴对称，而恒等映射显然会保持这种对称。
- $T(1,1) = \mathrm{e}^u(1,1)$ 很容易用手算验证，因为 $\cosh u + \sinh u = \mathrm{e}^u$。

常见错误

- 只证明了双曲线映射到自身之内；要用逆变换才能说明没有遗漏任何一点。
- 把夹角公式写成 $\tanh(v_1 - v_2)$；$1 + m_1 m_2$ 中的 $+$ 号使分母变成 $\cosh(v_1 + v_2)$，而在 T 之下改变的正是这个和。
- 忘记了 $\cosh a = \cosh b$ 的根 $v_1 + v_2 = v_1 + v_2 + 2u$，又没有说明它为何不可能。

STEP 之外

这个矩阵是狭义相对论（special relativity）中的洛伦兹变换（Lorentz boost），其中 x 和 y 分别扮演时间和空间的角色（采用光速为 1 的单位）。$x^2 - y^2$ 这个量是不变间隔（invariant

interval），$\tanh v$ 是速度，而 v 是它的快度（rapidity）。$v' = v + u$ 这个结果说明快度可以相加，这其实就是相对论速度加法公式的另一种面貌。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）就是以这种方式建立狭义相对论的。至于以特征向量的观点看不变直线，可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。