详细解答

STEP III 1991，第 5 题

纯数学 · 极坐标曲线与常微分方程

STEP III 1991，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s3-q5

关键思路

先把极坐标（polar coordinates）放在一旁：这条方程其实只是一条以 θ 为变量的二阶常系数线性常微分方程（linear second-order ODE with constant coefficients）。按惯常方法求解（余函数加特别积分），用 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处的条件定出常数，然后再回到几何。由 $r = f(\theta)$ 给出的曲线，若 r 起点和终点皆为 0，而中间一直保持正值，便是一个闭合环圈（closed loop），其面积为 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$。

解答

解微分方程

辅助方程（auxiliary equation）$m^2 + 4 = 0$ 的根为 $m = \pm 2\mathrm{i}$，所以余函数（complementary function）是

$$r = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta.$$

至于特别积分（particular integral），$\sin 3\theta$ 并不在余函数之内，所以我们试用 $r = k\sin 3\theta$。于是 $r'' = -9k\sin 3\theta$，而

$$-9k\sin 3\theta + 4k\sin 3\theta = 5\sin 3\theta \quad\Longrightarrow\quad k = -1.$$

因此通解（general solution）为

$$r = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta - \sin 3\theta, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2A\sin 2\theta + 2B\cos 2\theta - 3\cos 3\theta.$$

在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处，有 $\cos 2\theta = -1$、$\sin 2\theta = 0$、$\sin 3\theta = -1$ 及 $\cos 3\theta = 0$。两个条件变成

$$r = -A + 1 = 1 \quad\Longrightarrow\quad A = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -2B = -2 \quad\Longrightarrow\quad B = 1.$$

故此

$$r = \sin 2\theta - \sin 3\theta.$$

曲线是一个闭合环圈

要看出 r 在何处为零、其正负号如何，可利用恒等式 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$ 作因式分解：

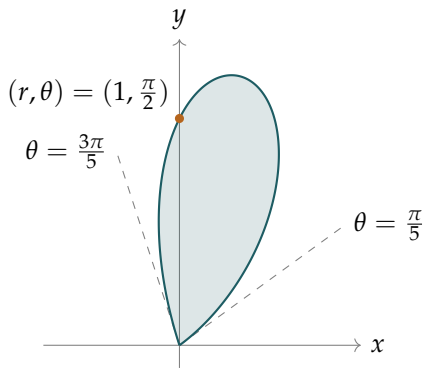
$$r = 2\cos\frac{5\theta}{2}\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right) = -2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{5\theta}{2}.$$

想一想 为甚么因式分解后的形式能解决“闭合环圈”这个问题?

因为在给定的范围内，两个因子的正负号都一目了然。当 $\frac{\pi}{5} \le \theta \le \frac{3\pi}{5}$ 时：

- $\frac{\theta}{2}$ 位于 $\left[\frac{\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}\right]$ 之内，所以 $\sin\frac{\theta}{2} > 0$；
- $\frac{5\theta}{2}$ 位于 $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 之内，所以 $\cos\frac{5\theta}{2} \le 0$，等号只在两个端点成立。

所以在 $\theta = \frac{\pi}{5}$ 及 $\theta = \frac{3\pi}{5}$ 处 $r = 0$，而对严格介乎两者之间的每一个 θ 都有 $r > 0$。因此曲线沿射线 $\theta = \frac{\pi}{5}$ 离开原点，以正的 r 绕行一周，再沿射线 $\theta = \frac{3\pi}{5}$ 返回原点。其间每一条射线 $\theta =$ 常数 都与曲线恰好相交一次（就是对应该 $r > 0$ 的那一点），所以曲线不会自相交。它是单一个闭合环圈，围出区域 $0 \le r \le \sin 2\theta - \sin 3\theta$，$\frac{\pi}{5} \le \theta \le \frac{3\pi}{5}$。



面积

所围的面积为

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\pi/5}^{3\pi/5} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/5}^{3\pi/5}\left(\sin^2 2\theta - 2\sin 2\theta\sin 3\theta + \sin^2 3\theta\right)\mathrm{d}\theta.$$

利用 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ 及 $2\sin P\sin Q = \cos(P-Q) - \cos(P+Q)$，

$$r^2 = 1 - \tfrac{1}{2}\cos 4\theta - \tfrac{1}{2}\cos 6\theta - \cos\theta + \cos 5\theta.$$

记 $D = \sin\frac{2\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5}$。我们在 $\left[\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}\right]$ 上逐项积分，并利用 $\sin(x+2\pi) = \sin x$ 及 $\sin(\pi - x) = \sin x$ 把每个正弦值化为 $\pm\sin\frac{\pi}{5}$ 或 $\pm\sin\frac{2\pi}{5}$：

$$\begin{aligned}
\int 1\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{2\pi}{5},\\
\int -\tfrac{1}{2}\cos 4\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\tfrac{1}{8}\left[\sin\tfrac{12\pi}{5} - \sin\tfrac{4\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{8}\left[\sin\tfrac{2\pi}{5} - \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{8}D,\\
\int -\tfrac{1}{2}\cos 6\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\tfrac{1}{12}\left[\sin\tfrac{18\pi}{5} - \sin\tfrac{6\pi}{5}\right] = -\tfrac{1}{12}\left[-\sin\tfrac{2\pi}{5} + \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = \tfrac{1}{12}D,\\
\int -\cos\theta\,\mathrm{d}\theta &= -\left[\sin\tfrac{3\pi}{5} - \sin\tfrac{\pi}{5}\right] = -D,\\
\int \cos 5\theta\,\mathrm{d}\theta &= \tfrac{1}{5}\left[\sin 3\pi - \sin\pi\right] = 0.
\end{aligned}$$

（第三行中，$\sin\frac{18\pi}{5} = \sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right) = -\sin\frac{2\pi}{5}$ 而 $\sin\frac{6\pi}{5} = -\sin\frac{\pi}{5}$。）相加得

$$\int_{\pi/5}^{3\pi/5} r^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi}{5} + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{12} - 1\right)D = \frac{2\pi}{5} - \frac{25}{24}D,$$

再除以二，

$$\mathcal{A} = \frac{\pi}{5} - \frac{25}{48}D = \frac{\pi}{5} + \frac{25}{48}\left[\sin\frac{\pi}{5} - \sin\frac{2\pi}{5}\right],$$

这正是所求的结果。

验算

- 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处：$r = \sin\pi - \sin\frac{3\pi}{2} = 1$ 而 $r' = 2\cos\pi - 3\cos\frac{3\pi}{2} = -2$，符合要求。
- 以数值计算，$\mathcal{A} \approx 0.6283 - \frac{25}{48}(0.3633) \approx 0.4391$。对 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 使用辛普森法则（Simpson's rule），以及对描出的环圈使用鞋带公式（shoelace formula），两者都得出 0.43911。由 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 出发以数值方法逐步求解微分方程，可重现 $r = \sin 2\theta - \sin 3\theta$，并确认 r 在两端都回到 0。
- 答案合理：环圈最远达到 $r \approx 1.22$，所张的角为 $\frac{2\pi}{5}$。半径为 1.22、圆心角为该角的扇形，面积约为 0.93，而环圈占去其中略少于一半。

常见错误

- 弄错特别积分的正负号：$(-9+4)k = 5$ 给出 $k = -1$，而不是 $+1$。
- 忘记证明在两个端点之间 $r > 0$。单凭 r 有两个零点并不足以构成环圈：r 有可能在中间变号，那样 $\frac{1}{2}\int r^2\,\mathrm{d}\theta$ 就不是所围的面积了。
- 化简 $\sin\frac{12\pi}{5}$ 或 $\sin\frac{18\pi}{5}$ 时粗心大意：两者各为 $\pm\sin\frac{2\pi}{5}$，而正负号至关重要。

STEP 之外

这里的方法之所以行得通，是因为方程是线性的：每一个解都是一个特解加上两个独立解 $\cos 2\theta$ 和 $\sin 2\theta$ 的组合，而两个初始条件（initial conditions）恰好选出唯一的一个解。这就是线性常微分方程的存在性与唯一性定理（existence and uniqueness theorem），大学一年级的课程会证明它，并且经常用到。一个相关而又引人入胜的事实是：对于在平方反比力（inverse-square force）作用下的轨道，$u = 1/r$ 满足 $u'' + u =$ 常数，牛顿（Newton）定律正是这样推出圆锥曲线（conic section）轨道的。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入门教材）对线性理论有详尽的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。