详细解答

STEP III 1991，第 4 题

纯数学 · 三维空间中的直线与平面

STEP III 1991，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s3-q4

关键思路

同一位观察者 O_1 的两条不同视线（line of sight）都经过 O_1，所以它们张成一个平面（plane），而 P 的路径与这两条视线都相交。一条直线若与经过 O_1 的两条直线相交，而本身又不经过 O_1，就必定位于这两条直线所在的平面上。对 O_2 也是同样道理，所以路径就是两个平面的交线。这样一来，一个关于四条看似异面（skew）的直线的问题，就化为一个叉积（cross product）和一组联立方程（simultaneous equations）。

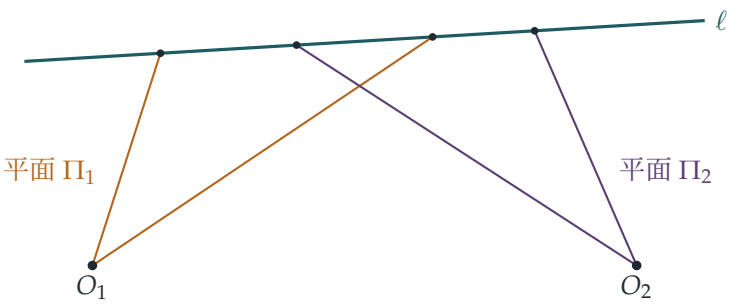
解答

设 P 沿直线 ℓ 运动。四条视线的方向为

$$\mathbf{d}_1 = (2,0,3), \qquad \mathbf{d}_1' = (0,3,4) \qquad （经过O_1），$$

$$\mathbf{d}_2 = (-3,1,3), \qquad \mathbf{d}_2' = (-4,2,5) \qquad （经过O_2）.$$

每条视线都连接一位观察者与 P 的某个位置，所以 ℓ 与这四条视线全部相交。



（仅为示意图：两条琥珀色视线与 ℓ 位于同一平面 Π_1 上，两条紫红色视线与 ℓ 则位于另一平面 Π_2 上。）

为何 ℓ 位于经过每位观察者的一个平面上

首先，ℓ 不可能经过 O_1。假如它经过，那么每当 $P \neq O_1$ 时，从 O_1 出发的视线就是 ℓ 本身，于是从 O_1 出发不可能有两条不同的视线。同理，ℓ 也不经过 O_2。

从 O_1 出发的两条视线是经过 O_1 的不同直线，所以它们只在 O_1 相交，并张成一个平面 Π_1。直线 ℓ 与它们交于两点，而这两点互不相同，因为两条视线唯一的公共点是 O_1，而 ℓ 并不经过 O_1。这两点都在 Π_1 上，所以整条 ℓ 都在 Π_1 上。同样地，ℓ 位于平面 Π_2 上，这个平面经过 O_2，并包含 $\mathbf{d}_2$ 和 $\mathbf{d}_2'$。

> ? **想一想** 难道 ℓ 不可以只是与每条视线各交于一点，而不位于任何特定的平面上吗?

若只有一条视线，的确可以。但这里有两个交点落在经过 O_1 的直线上，而两个相异的点就确定了 ℓ。这两点都在 Π_1 上，所以 ℓ 别无选择：它就是经过这两点的直线，而这条直线位于 Π_1 上。

平面 Π_1

Π_1 的一个法向量（normal）是

$$\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_1' = (2,0,3) \times (0,3,4) = (0-9,\ 0-8,\ 6-0) = (-9,-8,6),$$

而 Π_1 经过原点，所以

$$\Pi_1 : \quad 9x + 8y - 6z = 0.$$

平面 Π_2

Π_2 的一个法向量是

$$\mathbf{d}_2 \times \mathbf{d}_2' = (-3,1,3) \times (-4,2,5) = (5-6,\ -12+15,\ -6+4) = (-1,3,-2),$$

而 Π_2 经过 $O_2(8a,0,0)$，所以 $-(x-8a) + 3y - 2z = 0$，即

$$\Pi_2 : \quad x - 3y + 2z = 8a.$$

（快速验算：$(-3,1,3)\cdot(-1,3,-2) = 3+3-6 = 0$ 及 $(-4,2,5)\cdot(-1,3,-2) = 4+6-10 = 0$。）

我们假设 $a \neq 0$，否则两位观察者会重合。于是 O_2 不在 Π_1 上（因为 $9\cdot 8a \neq 0$），而 O_1 也不在 Π_2 上，这与上文所说的一致。

路径

法向量 $(-9,-8,6)$ 与 $(-1,3,-2)$ 并不平行，所以 Π_1 与 Π_2 相交于唯一一条直线，而这条直线必定是 ℓ。它的方向与两个法向量都垂直：

$$(-9,-8,6)\times(-1,3,-2)=(16-18,\ -6-18,\ -27-8)=(-2,-24,-35),$$

所以我们可以取方向为 $(2,24,35)$。要找直线上的一点，可设 $y=0$。两条方程变成 $9x=6z$ 和 $x+2z=8a$，所以 $x=\frac{2}{3}z$ 及 $\frac{8}{3}z=8a$。由此得 $z=3a$ 和 $x=2a$。所以 $(2a,0,3a)$ 在 ℓ 上。它也在从 O_1 出发的第一条视线上，正如所料。

因此 P 的路径为

$$\boxed{\frac{x-2a}{2}=\frac{y}{24}=\frac{z-3a}{35}}$$

或等价地，由 $9x+8y-6z=0$ 和 $x-3y+2z=8a$ 这一对方程给出。

最后，ℓ 确实与全部四条视线相交，而且交点都不是观察者所在的点。把 ℓ 写成 $(2a+2\lambda,\ 24\lambda,\ 3a+35\lambda)$，它与四条视线的交点依次为

$$(2a,0,3a),\qquad (0,-24a,-32a),\qquad \left(\tfrac{80a}{37},\tfrac{72a}{37},\tfrac{216a}{37}\right),\qquad \left(\tfrac{56a}{25},\tfrac{72a}{25},\tfrac{36a}{5}\right)$$

。

想一想 当 $a>0$ 时，第二个点的 y 和 z 都是负数。这有问题吗？

题目给出的视线是整条直线，而 $(0,-24a,-32a)$ 满足 $x=0,\ y/3=z/4$。我们只用到这些直线，并没有用到观察者面向哪一方，所以答案成立。如果你把“视线”理解为从观察者出发的射线，这次观测就落在 O_1 的背后。那只是数据的一个古怪之处，并非方法有错。

验算

- 把点 $(2a,0,3a)$ 和方向 $(2,24,35)$ 代入两个平面方程：$9(2)+8(24)-6(35)=18+192-210=0$ 及 $2-72+70=0$，所以这个方向位于两个平面上。
- 取 $a=1$，点 $\left(\frac{80}{37},\frac{72}{37},\frac{216}{37}\right)$ 等于 $O_2+\frac{72}{37}(-3,1,3)$，而且 $\frac{80/37-2}{2}=\frac{3}{37}=\frac{72/37}{24}$。所以它既在视线上，也在路径上。
- 我们对 a 的若干个值，以精确的有理数运算验证了全部四个交点。

常见错误

- 试图求出各对视线的交点：不同观察者在不同时刻的视线，根本不一定相交。

- 忘记 Π_2 经过的是 O_2 而不是原点，结果得出 $x - 3y + 2z = 0$ 而不是 $= 8a$。
- 计算叉积时正负号出错。务必把法向量与两个方向向量分别再作点积验算。

STEP 之外

空间中与四条给定直线都相交的直线有多少条？若四条直线处于一般位置（general position），答案是两条（在复数范围内计算；在实数范围内则可以是零条）。这是枚举几何（enumerative geometry）的一个经典结果，而本题的四条直线比较特殊，因为它们两两一组地经过两位观察者。同一个“视线平面”的想法，也是三角测量（triangulation）和立体视觉中对极几何（epipolar geometry）的基础：两部相机借此还原三维空间中各点的位置。至于直线、平面与交集的线性代数，可阅读 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。