详细解答

STEP III 1991，第 3 题

纯数学 · 分段函数与反函数

STEP III 1991，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s3-q3

关键思路

绝对值（modulus）不过是一个函数，其内部的式子变号时，它的表达式就跟著改变。这里三个绝对值只在 $x=-1$、0 和 1 处变号，因此在它们把 $x<2$ 分割出来的四个区间上，函数各自都是一个普通的二次函数（quadratic）。一旦求得这四个二次函数，每一个问题（转向点、拐点、连续性、光滑性、反函数）都只是关于简单抛物线及其如何相接的问题。

解答

去掉绝对值

把绝对值内的式子因式分解：$x^2-x=x(x-1)$、$x^2-1=(x-1)(x+1)$ 和 $x^2+x=x(x+1)$。它们的正负号如下：

区间	x^2-x	x^2-1	x^2+x	$\mathrm{f}(x)$
$x\le -1$	$+$	$+$	$+$	x^2-4x-1
$-1\le x\le 0$	$+$	$-$	$-$	$3x^2+1$
$0\le x\le 1$	$-$	$-$	$+$	$1-5x^2$
$1\le x<2$	$+$	$+$	$+$	x^2-4x-1

例如，在 $-1\le x\le 0$ 上，

$$\mathrm{f}(x)=2(x^2-x)+(1-x^2)+2(x^2+x)=3x^2+1,$$

而在 $0\le x\le 1$ 上，$\mathrm{f}(x)=-2(x^2-x)+(1-x^2)-2(x^2+x)=1-5x^2$。在外侧的两个区间上，三个绝对值内的式子全为正，而 $2(x^2-x)+(x^2-1)-2(x^2+x)=x^2-4x-1$。在端点处，其中一个绝对值内的式子为零，所以两边的公式在该处都正确。

连续性与可导性

f 由 $|\cdot|$ 和多项式组合而成，这些全都是连续的，所以 f 在 $x < 2$ 上**处处连续（continuous）**。作为验算，相邻的公式在接驳处吻合：$f(-1) = 4$、$f(0) = 1$、$f(1) = -4$。

至于可导性（differentiability），可比较接驳处的单侧导数（one-sided derivative）。四段的导数分别为 $2x - 4$、$6x$、$-10x$ 和 $2x - 4$。

- 在 $x = -1$：左侧为 $2(-1) - 4 = -6$，右侧为 $6(-1) = -6$。两者相同，所以 $f'(-1) = -6$。
- 在 $x = 0$：两侧都得 0，所以 $f'(0) = 0$。
- 在 $x = 1$：左侧为 -10，右侧为 $2 - 4 = -2$。两者不同，所以图像在 $(1, -4)$ 处有一个**尖角（corner）**。

因此 f **并非处处可导**：它恰好只在 $x = 1$ 处不可导。

转向点与拐点

在每一段上都有 $f' < 0$，只有 $x = 0$ 这一点例外：

- $x < -1$ 和 $1 < x < 2$：由于 $x < 2$，$f'(x) = 2x - 4 < 0$；
- $-1 < x < 0$：$f'(x) = 6x < 0$；
- $0 < x < 1$：$f'(x) = -10x < 0$。

由于 f 连续，而且在每一段上都严格递减，所以它**在整个 $x < 2$ 上严格递减（strictly decreasing）**。特别地，它**没有极大点或极小点**，连局部的也没有。

> **想一想** $f'(0) = 0$，那么 $(0, 1)$ 不就是转向点（turning point）吗？

不是。左边一段 $3x^2 + 1$ 在 0 处取得极小值，右边一段 $1 - 5x^2$ 则在该处取得极大值，但在各自公式适用的区间上，两者都是递减的。所以 f 经过 $x = 0$ 时仍然在下降，只是切线是水平的。

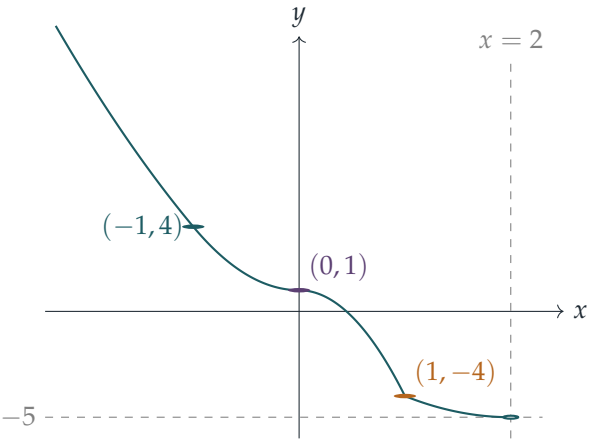
现在看凹凸性（concavity）。各段的二阶导数为

$$f'' = 2\ (x < -1), \qquad 6\ (-1 < x < 0), \qquad -10\ (0 < x < 1), \qquad 2\ (1 < x < 2).$$

- 在 $x = 0$ 处，图像由下凸（convex）变为上凸（concave），而且在该处有切线，所以 $(0, 1)$ 是一个**驻拐点（stationary point of inflection）**。
- 在 $x = -1$ 处，f'' 由 2 跳到 6，但仍然为正，所以没有拐点。
- 在 $x = 1$ 处，曲线由上凸变回下凸，但该处是尖角，没有切线。按照通常的定义（切线穿过曲线），$(1, -4)$ 不是拐点。作答时值得明确指出这一点。

草图

当 $x \to -\infty$ 时，$\mathrm{f}(x) \to +\infty$。当 $x \to 2^-$ 时，$\mathrm{f}(x) \to 4 - 8 - 1 = -5$，这个值并不会取到。



曲线一直下降。它在 $(0,1)$ 处变平，形成一个水平拐点，并在 $(1,-4)$ 处有一个尖角，斜率在该处由 -10 跳到 -2。

反函数

由于 f 在 $x < 2$ 上连续且严格递减，而且在左端 $\mathrm{f} \to \infty$，在右端 $\mathrm{f} \to -5$，所以它是由 $(-\infty, 2)$ 到 $(-5, \infty)$ 的双射（bijection）。因此 f^{-1} 定义在 $x > -5$ 上。我们利用 $y = \mathrm{f}(x)$，在每一段所覆盖的值域上分别求反函数（inverse）。

- $x \le -1$，值域 $y \ge 4$：$y = x^2 - 4x - 1 = (x-2)^2 - 5$，所以 $(x-2)^2 = y + 5$。这里 $x - 2 < 0$，所以取负根：$x = 2 - \sqrt{y+5}$。
- $-1 \le x \le 0$，值域 $1 \le y \le 4$：$x^2 = (y-1)/3$，而 $x \le 0$，所以 $x = -\sqrt{(y-1)/3}$。
- $0 \le x \le 1$，值域 $-4 \le y \le 1$：$x^2 = (1-y)/5$，而 $x \ge 0$，所以 $x = \sqrt{(1-y)/5}$。
- $1 \le x < 2$，值域 $-5 < y \le -4$：同样有 $(x-2)^2 = y + 5$ 且 $x - 2 < 0$，所以 $x = 2 - \sqrt{y+5}$。

把变量改写为 x：

$$\mathrm{f}^{-1}(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{x+5}, & -5 < x \le -4, \\ \sqrt{\frac{1-x}{5}}, & -4 \le x \le 1, \\ -\sqrt{\frac{x-1}{3}}, & 1 \le x \le 4, \\ 2 - \sqrt{x+5}, & x \ge 4. \end{cases}$$

各公式在共用的端点处吻合。例如，在 $x = 4$ 处两者都得 -1，在 $x = -4$ 处两者都得 1。

验算

- 抽查数值：$\mathrm{f}(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$，而 $1 - 5 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$。此外 $\mathrm{f}^{-1}(-\frac{1}{4}) = \sqrt{1.25/5} = \frac{1}{2}$。
- 直接计算，$\mathrm{f}(-3) = 2 \cdot 12 + 8 - 2 \cdot 6 = 20$。公式给出 $9 + 12 - 1 = 20$，而 $\mathrm{f}^{-1}(20) = 2 - \sqrt{25} = -3$。
- 数值上，对 10^5 个随机选取的 $x < 2$ 都有 $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{f}(x)) = x$；函数在一个细密网格的每一点上都在递减；而 $x = 1$ 处的单侧斜率算出来是 -10 和 -2。

常见错误

- 因为 $\mathrm{f}'(0) = 0$ 就把 $(0, 1)$ 称为极大点或极小点。如果某条抛物线本身的转向点位于该公式适用区间的边缘，那个转向点就无关重要。
- 求反函数时选错平方根。应由 x（或 $x - 2$）在每个区间上的正负号来决定。
- 以为两个公式的接驳处必定是不可导点。在 $x = -1$ 和 $x = 0$ 处，两边的斜率是吻合的。

STEP 之外

分段定义的函数（piecewise-defined function）可以连续而不可导，也可以可导而二阶导数不连续（这里 f'' 在 $x = -1$ 和 $x = 0$ 处跳跃）。反函数定理（inverse function theorem）指出，严格单调（strictly monotonic）的连续函数有连续的反函数，而且在 $\mathrm{f}' \neq 0$ 的地方反函数可导。留意 f^{-1} 在 $x = 1$ 处有一条垂直切线，恰好对应 $\mathrm{f}'(0) = 0$ 之处。Abbott 的 *Understanding Analysis*（数学分析入门读本）对这些概念有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。