详细解答

STEP III 1991，第 2 题

纯数学 · 几何中的复数

STEP III 1991，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s3-q2

关键思路

一个复数（complex number）可以同时记录长度之比和一个角。商 $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$ 记下了三角形在 P_1 处两条边的长度之比（即它的模（modulus)），以及由一条边转到另一条边所转过的角（即它的辐角（argument)）；而这两项资料，正是相似三角形（similar triangles）的 SAS 判别法所需要的。只要把条件写成行列式（determinant），各部分便归结为把一个行列式因式分解（factorise），或者巧妙地选取一个三角形 $Q_1Q_2Q_3$ 来作比较。

解答

先处理一个印刷错误

按题目所印，左边的分母是 $z_2 - z_3$。这不可能是对的：取 $w_i = z_i$，使两个三角形完全相同。这时右边是 $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$，由于 $z_2 \neq z_1$，它与左边并不相等。题目原意的条件，亦即与行列式吻合的条件，是

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}. \qquad (*)$$

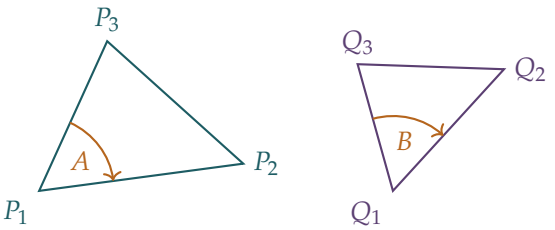
我们要证明的就是这个条件。

相似的条件

设 A 为三角形 $P_1P_2P_3$ 在 P_1 处的角，故 $0 < A < \pi$。以极式（polar form）表示，

$$\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{P_1P_2}{P_1P_3}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$

其中 θ 是由 $\overrightarrow{P_1P_3}$ 的方向转到 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的方向所转过的角。因此，若 $P_1 \to P_2 \to P_3$ 沿逆时针方向排列，则 $\theta = -A$（由 P_1P_3 出发，要顺时针转才到达 P_1P_2）；若沿顺时针方向排列，则 $\theta = +A$。简而言之，这个商的辐角（取值于 $(-\pi, \pi)$）的大小等于 P_1 处的角，而其正负号则告诉我们三角形的绕向（sense）。对各个 w 而言情况相同，其中 B 是 Q_1 处的角。



同向相似 $\Rightarrow (*)$。若两个三角形相似，且 $P_i \leftrightarrow Q_i$ 互相对应，则 P_1 和 Q_1 处的两边之比相同，即 $P_1P_2/P_1P_3 = Q_1Q_2/Q_1Q_3$，而该处的角亦相等，即 $A = B$。由于两个三角形的绕向相同，两个辐角 $\mp A$ 和 $\mp B$ 的正负号相同，所以它们相等。模相等，辐角也相等，便得出 $(*)$。

$(*) \Rightarrow$ 同向相似。若 $(*)$ 成立，比较两边的模可得 $P_1P_2/P_1P_3 = Q_1Q_2/Q_1Q_3$。比较两边的辐角可得 $A = B$，而且正负号相同，所以两个三角形的绕向相同。两边成比例而夹角相等，正是 SAS 条件，故两个三角形相似，且 $P_i \leftrightarrow Q_i$ 互相对应。（若 $(*)$ 是实数，则两组三点各自共线（collinear），这两个退化的“三角形”仍然相似。）

还可以从另一个角度看同一件事：$(*)$ 恰好表示 $w_i = az_i + b$，其中常数 $a = (w_1 - w_2)/(z_1 - z_2) \neq 0$，$b = w_1 - az_1$。映射 $z \mapsto az + b$ 是倍数为 $|a|$ 的放大（enlargement），再加上转角为 $\arg a$ 的旋转（rotation）和一个平移（translation），而这样的映射保持形状和绕向不变。

行列式形式

去分母后（由于各点互不相同，两个分母均不为零），$(*)$ 等价于

$$(z_1 - z_2)(w_1 - w_3) - (z_1 - z_3)(w_1 - w_2) = 0.$$

展开后，z_1w_1 项互相抵消，余下

$$z_1(w_2 - w_3) - z_2(w_1 - w_3) + z_3(w_1 - w_2) = 0,$$

这正是该行列式沿第一行的展开式。所以 $(*)$ 等同于 $\det = 0$。

处理以下各部分时，用另一个方法计算这个行列式会较为方便。从第二列和第三列分别

减去第一列，行列式的值不变；然后沿最底一行展开，这一行现在是 $(1,0,0)$：

$$\det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} z_2-z_1 & z_3-z_1 \\ w_2-w_1 & w_3-w_1 \end{pmatrix}. \tag{†}$$

第 (i) 部分

取 $w_i = z_i^2$，(†) 变成

$$\begin{aligned}(z_2-z_1)(z_3^2-z_1^2)-(z_3-z_1)(z_2^2-z_1^2) &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)[(z_3+z_1)-(z_2+z_1)] \\ &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)(z_3-z_2).\end{aligned}$$

由于各 z_i 互不相同，每个因子均不为零。所以行列式永不为零，两个三角形永不相似（按上述意义）。

第 (ii) 部分

取 $w_i = z_i^3$，并利用 $z_j^3 - z_1^3 = (z_j - z_1)(z_j^2 + z_j z_1 + z_1^2)$：

$$\begin{aligned}(z_2-z_1)(z_3^3-z_1^3)-(z_3-z_1)(z_2^3-z_1^3) &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)[(z_3^2+z_3z_1)-(z_2^2+z_2z_1)] \\ &= (z_2-z_1)(z_3-z_1)(z_3-z_2)(z_1+z_2+z_3),\end{aligned}$$

这是因为 $z_3^2 - z_2^2 + z_1(z_3 - z_2) = (z_3 - z_2)(z_3 + z_2 + z_1)$。首三个因子均不为零，所以行列式为零当且仅当 $z_1 + z_2 + z_3 = 0$。换言之，两个三角形相似，当且仅当形心（centroid）$\frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$ 位于原点。

第 (iii) 部分

窍门是把三角形与重新标记顶点后的自己作比较。取 Q_1, Q_2, Q_3 为 P_2, P_3, P_1，即

$$w_1 = z_2, \qquad w_2 = z_3, \qquad w_3 = z_1.$$

想一想 “等边”为甚么会与这样的重新标记有关?

若在 $P_1 \leftrightarrow P_2$、$P_2 \leftrightarrow P_3$、$P_3 \leftrightarrow P_1$ 的对应下相似，则各组对应边必有相同的比 $k > 0$：

$$\frac{P_2P_3}{P_1P_2} = \frac{P_3P_1}{P_2P_3} = \frac{P_1P_2}{P_3P_1} = k.$$

把三者相乘得 $k^3 = 1$，所以 $k = 1$，三边全部相等。反之，若三角形是等边（equilateral）三角形，则绕其中心旋转 $120°$（取适当的方向）会把 $P_1 \to P_2 \to P_3 \to P_1$ 依次对应过去。旋转保持形状和绕向不变，所以该三角形与重新标记后的自己同向相似。因此

$$P_1P_2P_3 \text{ 为等边三角形} \iff \text{它同向相似于} P_2P_3P_1.$$

根据第一部分，右边成立当且仅当

$$0 = \det\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = z_1(z_3 - z_1) - z_2(z_2 - z_1) + z_3(z_2 - z_3),$$

即

$$z_1z_3 - z_1^2 - z_2^2 + z_1z_2 + z_2z_3 - z_3^2 = 0 \iff z_2z_3 + z_3z_1 + z_1z_2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2,$$

这正是所要证明的结果。

验算

- 第 (ii) 部分：$z_1, z_2, z_3 = 1, \omega, \omega^2$（其中 $\omega = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$）的形心为 0，但它们的立方全都等于 1，并非互不相同。改用 $z = 1,\ \mathrm{i},\ -1 - \mathrm{i}$。形心为 0，而立方分别是 $1,\ -\mathrm{i},\ 2 - 2\mathrm{i}$。按 P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 的次序，两个三角形的边长都是 $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{5}$（在这个例子中它们甚至全等（congruent）），而且两者都沿逆时针方向排列。
- 第 (iii) 部分：对于 $z = 0, 1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$，两边都等于 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$，因为 $1 + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$。
- 以电脑对 10^4 个随机三角形作测试，结果证实 $w_i = az_i + b$ 总是满足 $(*)$，而经反射的三角形 $w_i = a\bar{z}_i + b$ 则从不满足。测试亦证实了 (†) 的两个因式分解，以及等边三角形的判别准则。至于题目所印的条件（分母为 $z_2 - z_3$），在所有真正相似的情况中无一成立。

常见错误

- 忽略三角形的绕向。单看模，只能得出“容许反射的相似”。互为镜像的三角形，其辐角的正负号相反，所以并不满足 $(*)$。
- 在第 (iii) 部分忘记证明逆命题（converse）：“与重新标记后的自己相似”这个论证必须双向都成立，而 $k^3 = 1 \Rightarrow k = 1$ 这一步用到了 k 是正实数。

STEP 之外

映射 $z \mapsto az + b$ 就是平面上保持定向（orientation-preserving）的相似变换。它们是最简单的莫比乌斯变换（Möbius transformations），而四个点的交比（cross-ratio）则是 $(*)$ 的推广。等边条件亦可因式分解为 $(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0$，这表示 z_1, z_2, z_3 沿其中一个绕向围成一个等边三角形。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把这种以几何眼光看待复数的思考方式发挥得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。