详细解答

STEP III 1991，第 14 题

力学 • 涉及弹簧的圆周运动

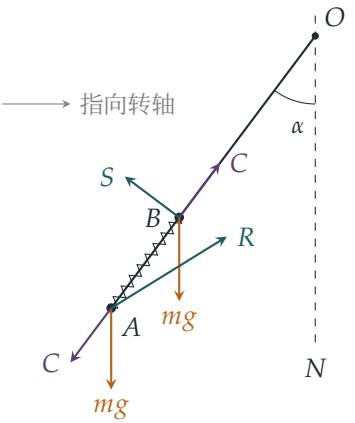
> **STEP III 1991，第 14 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q14

关键思路

所有物体都以相同的角速率（angular speed）绕 ON 作水平圆周运动，所以每个质点都有已知的加速度 $\omega^2 r$，方向指向转轴，此外再无其他加速度。小环套在一根光滑（smooth）的杆上，对它来说最简洁的方程是沿杆方向的那一条，因为未知的法向反作用力（normal reaction）不会在其中出现。接着，弹簧的力把小环与 A 处的质点联系起来，而杆在该处的反作用力的方向就决定了 k。

解答

模型。杆是轻而光滑的，A 和 B 是质量为 m 的质点，弹簧沿着杆位于 B 与 A 之间。设 $\alpha = \sin^{-1}\frac{3}{5}$，于是 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$，$\cos\alpha = \frac{4}{5}$，并且 $\omega^2 = \frac{5g}{2a}$。设 $OB = x$，则 $AB = 2a - x$。



这里 C 是弹簧中的推力（thrust）（我们稍后会发现弹簧是被压缩的，所以它把 B 推向 O，并把 A 推离 O），S 是光滑杆对 B 的法向反作用力（垂直于杆，位于铅垂面内，指向有待确定），而 R 是杆对 A 的反作用力。由于 ω 是常数，而且 B 相对于杆静止，所以没有横越铅垂面的加速度，因此所有的力都在该平面内。

长度 OB

B 沿半径为 $x\sin\alpha$ 的水平圆周运动，所以它的加速度是 $\omega^2 x\sin\alpha$，方向水平指向 ON。沿杆按 $O\to A$ 的方向（向下并远离转轴）分解（resolve）。加速度在这个方向上的分量是 $-\omega^2 x\sin\alpha\cdot\sin\alpha$，因为加速度指向转轴，而杆与铅垂线的夹角是 α。

最简单的做法，是把弹簧作用于 B 的力设为张力（tension）T（把 B 拉向 A），让正负号自行在计算中显现。由胡克定律（Hooke's law），

$$T=\frac{kmg\left((2a-x)-a\right)}{a}=\frac{kmg(a-x)}{a}.$$

因为杆是光滑的，反作用力 S 没有沿杆方向的分量。所以，沿 OA 方向，

$$mg\cos\alpha+\frac{kmg(a-x)}{a}=-m\omega^2 x\sin^2\alpha.$$

代入 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$、$\sin^2\alpha=\frac{9}{25}$ 和 $\omega^2=\frac{5g}{2a}$，右边就是 $-\frac{9gx}{10a}m$。两边除以 mg 再乘以 $10a$：

$$\begin{aligned}8a+10k(a-x)&=-9x\\(10k+8)a&=(10k-9)x,\end{aligned}$$

所以

$$OB=x=\frac{(10k+8)a}{10k-9},$$

这正是要证明的结果。留意 $x>a$（答案要为正数，必须有 $10k>9$），所以 $AB=2a-x<a$：弹簧是被压缩的，推力为

$$C=-T=\frac{kmg(x-a)}{a}=\frac{17k\,mg}{10k-9},$$

其中用到 $x-a=\dfrac{17a}{10k-9}$。

求 k

想一想 为甚么 A 处的反作用力不像 B 处的那样垂直于杆？

A 处的质点是固定在杆上的，而不是套在杆上，所以杆可以沿任何方向推它或拉它。光滑这个条件只限制了作用于滑动小环的力。因此我们把 R 写成分量：R_h 水平指向转轴，R_v 铅垂向上。

A 沿半径为 $2a\sin\alpha = \frac{6a}{5}$ 的圆周运动，所以它的加速度是 $\omega^2 \cdot \frac{6a}{5} = 3g$，方向指向转轴。推力 C 沿 OA 作用于 A，方向远离 O，所以它的分量是远离转轴的 $C\sin\alpha$ 和向下的 $C\cos\alpha$。因此

$$\text{水平（指向转轴）：}\quad R_h - \tfrac{3}{5}C = 3mg,$$
$$\text{铅垂：}\quad R_v - mg - \tfrac{4}{5}C = 0.$$

设 $C = c\,mg$。反作用力与水平线的夹角是 $\tan^{-1}\frac{13}{21}$，所以

$$\frac{R_v}{R_h} = \frac{1+\frac{4}{5}c}{3+\frac{3}{5}c} = \frac{13}{21} \implies 21 + \tfrac{84}{5}c = 39 + \tfrac{39}{5}c \implies 9c = 18, \quad c = 2.$$

（当 $c > 0$ 时，R_h 和 R_v 都是正数，所以反作用力确实指向上方和内侧，正负号并无歧义。）于是

$$\frac{17k}{10k-9} = 2 \implies 17k = 20k - 18 \implies k = 6.$$

所以 $k = 6$，由此得 $OB = \frac{68a}{51} = \frac{4}{3}a$，稳妥地介乎 a 与 $2a$ 之间，而推力为 $C = 2mg$。（这时作用于 A 的反作用力是 $R_h = \frac{21}{5}mg$，$R_v = \frac{13}{5}mg$。）

作用于小环的反作用力

想一想 应该沿哪个方向分解，才能以最少的工夫求出 S?

垂直于杆的方向：这样弹簧的力就不会出现。在铅垂面内取垂直于 OA 的单位方向，指向上方并远离转轴；它与水平线的夹角是 α，所以它的分量是向外的 $\cos\alpha$ 和向上的 $\sin\alpha$。设 S 为作用于 B 的反作用力在这个方向上的分量。重量的贡献是 $-mg\sin\alpha$，而加速度（$\omega^2 x\sin\alpha$，指向转轴）的贡献是 $-\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha$。所以

$$S - mg\sin\alpha = -m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha.$$

代入 $x = \frac{4}{3}a$：

$$m\omega^2 x\sin\alpha\cos\alpha = m\cdot\frac{5g}{2a}\cdot\frac{4a}{3}\cdot\frac{12}{25} = \frac{8}{5}mg, \qquad \text{所以} \qquad S = \frac{3}{5}mg - \frac{8}{5}mg = -mg.$$

因此杆与小环之间的反作用力的大小是

$$\boxed{mg},$$

而负号告诉我们，它垂直于杆，方向是向下并指向转轴。

验算

- 对 B 作完整的向量验算（水平分量以指向转轴为正，铅垂分量以向上为正），取 $C = 2mg$ 沿 AO 作用，以及上面求得的 $S = mg$。水平方向：$\frac{3}{5}(2mg) + \frac{4}{5}(mg) = 2mg$，而

$m\omega^2 x\sin\alpha = m\cdot\frac{5g}{2a}\cdot\frac{4a}{3}\cdot\frac{3}{5} = 2mg$。铅垂方向：$\frac{4}{5}(2mg) - \frac{3}{5}mg - mg = 0$。两者都平衡。

- 当 $k\to\infty$ 时，弹簧变成刚性，而 $OB\to a$，即弹簧的自然长度（natural length），与预期相符。
- 数值方面，取 $m = g = a = 1$，我们以 200 个随机的 k 值精确地验证了 OB 的公式，发现夹角只在 $k = 6$ 时才等于 $\tan^{-1}\frac{13}{21}$，并得到 $|S| = 1.0$。由一个小位移开始，逐步计算 B 沿杆的运动，结果它一直留在 $x\approx 1.3333$ 附近。

常见错误

- 假设弹簧被拉长，然后对 $x > a$ 感到困惑。应让张力的正负号由代数运算自行得出。
- 把 A 处的反作用力当作垂直于杆。只有滑动的小环才受这个限制。
- 圆周运动的半径用了 x 而不是 $x\sin\alpha$。

STEP 之外

在随杆一起转动的参考系中，B 受到一个向外的“离心力”（centrifugal force）$m\omega^2 r$，沿杆方向的方程就变成一道普通的平衡问题。把这个观点再推进一步，就会得到有效势（effective potential）、科里奥利力（Coriolis force）（在这里，一旦 B 沿杆移动，它就由杆的反作用力抵销），以及平衡的稳定性：$x = \frac{4}{3}a$ 是否稳定？Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）正是以这个程度讨论非惯性参考系（non-inertial frames）和转动系统。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。