详细解答

STEP III 1991，第 13 题

力学 · 抛体与天花板的碰撞

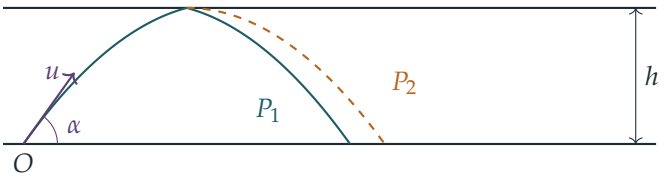
> **STEP III 1991，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q13

关键思路

天花板是光滑的，所以水平速度 $u\cos\alpha$ 始终不变，每个射程都只是 $u\cos\alpha$ 乘以飞行时间。全部工夫都在铅垂方向的运动上，而能量方程（energy equation）可以立即给出质点到达天花板时的铅垂速率。经过弹性碰撞（elastic impact）之后，质点下落的过程与上升的过程完全一样，只是倒过来播放；经过非弹性碰撞（inelastic impact）之后，它就只是从静止落下。

解答

把两个质点都视为在重力作用下自由运动的质点（point mass），不计空气阻力。记 $u=\sqrt{8gh}$、$s=\sin\alpha$ 及 $c=\cos\alpha$。以 O 为原点，取 x 沿水平方向，y 铅垂向上。



到达天花板

初始铅垂速度为 us，而在上升期间

$$\dot{y}^2=u^2s^2-2gy=8gh\,s^2-2gy.$$

质点要到达高度 h，必须在该处有 $\dot{y}^2\geq 0$，即 $8ghs^2\geq 2gh$，所以 $s^2\geq\frac{1}{4}$。由于 α 是锐角，$s>0$，故此条件即 $\sin\alpha\geq\frac{1}{2}$，亦即 $\alpha\geq\frac{1}{6}\pi$。（当 $\alpha=\frac{1}{6}\pi$ 时，质点恰好擦过天花板。）当

它确实到达天花板时，它在该处的向上速率为

$$w = \sqrt{8ghs^2 - 2gh} = \sqrt{2gh}\,\sqrt{4s^2 - 1}.$$

P_1 的射程

在上升途中，铅垂速度以 g 的变率由 us 均匀地减至 w，所以到达天花板所需的时间为

$$t_1 = \frac{us - w}{g}.$$

> **想一想** P_1 从天花板回落到地面需要多少时间?

碰撞是完全弹性的，而天花板是光滑的，所以铅垂速度变为向下的 w，水平速度则不变。于是，由天花板向下的铅垂运动，就是上升时的铅垂运动在时间上倒过来进行（从高度 h 出发，以速率 w 朝向地面，并以 g 加速）。因此它到达地面时的铅垂速率为 us，所需时间同样是 t_1。直接计算亦可：铅垂速率以 g 的变率由 w 增至 $\sqrt{w^2 + 2gh} = us$。

总飞行时间为 $2t_1$，所以射程（range）为

$$\begin{aligned} R_1 &= uc \cdot \frac{2(us - w)}{g} = \frac{2\sqrt{8gh}\,c}{g}\left(2\sqrt{2gh}\,s - \sqrt{2gh}\sqrt{4s^2 - 1}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{8gh}\sqrt{2gh}}{g}\,c(2s - \sqrt{4s^2 - 1}) = 8h\cos\alpha\left(2\sin\alpha - \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\right), \end{aligned}$$

当中用到 $us = \sqrt{8gh}\,s = 2\sqrt{2gh}\,s$ 及 $\sqrt{8gh}\sqrt{2gh} = 4gh$。这就是所求的射程。

P_2 的射程与差距 D

P_2 沿相同的路径上升至天花板，所需时间为 t_1。碰撞是完全非弹性的，所以它的铅垂速度变为零；天花板是光滑的，所以水平速度仍然是 uc。其后它从静止下落高度 h，所需时间为 $\sqrt{2h/g}$。因此

$$R_2 = uc\left(t_1 + \sqrt{\tfrac{2h}{g}}\right), \qquad R_2 - R_1 = uc\left(\sqrt{\tfrac{2h}{g}} - t_1\right).$$

现在

$$t_1 = \frac{\sqrt{2gh}\,(2s - \sqrt{4s^2 - 1})}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,(2s - \sqrt{4s^2 - 1})$$

而 $uc\sqrt{2h/g} = \sqrt{8gh}\sqrt{2h/g}\,c = 4hc$，所以

$$R_2 - R_1 = 4h\cos\alpha\left(1 - 2\sin\alpha + \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\right).$$

当 $\frac{1}{6}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ 时，此式为正：对于 $s > \frac{1}{2}$，我们有 $(2s-1)^2 = 4s^2 - 1 - 2(2s-1) < 4s^2 - 1$，所以 $2s - 1 < \sqrt{4s^2 - 1}$。因此 P_2 总是落在较远处（弹性反弹令 P_1 更快地被抛回地面），而

$$D = 4h\cos\alpha\left(1 - 2\sin\alpha + \sqrt{4\sin^2\alpha - 1}\right).$$

求 D 的极大值

设 $f(\alpha) = D/(4h) = c(1-2s) + cr$，其中 $r = \sqrt{4s^2-1}$，定义于 $\frac{1}{6}\pi \le \alpha < \frac{1}{2}\pi$。留意 $f(\frac{1}{6}\pi) = 0$，当 $\alpha \to \frac{1}{2}\pi$ 时 $f \to 0$（因为 $c \to 0$），而在两者之间 $f > 0$。求导（differentiate），并利用 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{4sc}{r}$，得

$$f'(\alpha) = -s(1-2s) - 2c^2 - sr + \frac{4sc^2}{r}.$$

代入 $c^2 = 1 - s^2$，再乘以 $r > 0$（当 $\alpha > \frac{1}{6}\pi$）：

$$\begin{aligned} rf'(\alpha) &= (4s^2 - s - 2)\,r - sr^2 + 4s(1-s^2) \\ &= (4s^2 - s - 2)\,r - s(8s^2 - 5). \end{aligned}$$

当 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 时，$s = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 而 $r = 1$，得出 $(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} - 2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(4-5) = 0$。所以 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 是一个驻点（stationary point）。

> **想一想** 我们怎样知道它就是极大值，而不是别的驻点？

在任何驻点，都有 $(4s^2 - s - 2)r = s(8s^2 - 5)$。两边平方并利用 $r^2 = 4s^2 - 1$，展开后因式分解，得

$$(4s^2 - s - 2)^2(4s^2 - 1) - s^2(8s^2 - 5)^2 = -2(2s^2 - 1)(8s^3 - s^2 - 2s - 2),$$

所以每个驻点都满足 $s^2 = \frac{1}{2}$ 或 $q(s) = 8s^3 - s^2 - 2s - 2 = 0$。在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上，$q'(s) = 24s^2 - 2s - 2 > 0$，所以 q 是递增的；由于 $q(0.8) = -0.144 < 0 < 0.0985 = q(0.82)$，它在该区间内唯一的根位于 $(0.8, 0.82)$ 之内。但对于这样的 s，

$$4s^2 - s - 2 < 4(0.82)^2 - 0.8 - 2 < 0, \qquad 8s^2 - 5 > 8(0.8)^2 - 5 > 0,$$

所以左边 $(4s^2 - s - 2)r$ 为负，右边 $s(8s^2 - 5)$ 为正：这个根是平方时产生的，并不是驻点。因此 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 是 $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 内唯一的驻点。由于 f 是连续的，在区间内部为正，而在两端为零（或趋向零），它在区间内部必有极大值，而这极大值必定出现在这个驻点。所以当 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ 时 D 最大，且

$$D_{\max} = 4h \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2} + 1) = 4h(\sqrt{2} - 1).$$

验算

- 当 $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ 时，质点刚好触及天花板，所以两个质点的结果应该一致：果然 $D = 0$，而 $R_1 = 8h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\,h$ 正是惯常的射程 $u^2 \sin 2\alpha / g$。
- 取 $h = 1.7\,\mathrm{m}$，在 $\alpha = 1$ 时以数值方法逐步计算两个运动，得 $R_1 \approx 2.420\,\mathrm{m}$ 及 $D \approx 2.464\,\mathrm{m}$，与公式吻合。对 α 作细密搜索，得出 $D/(4h)$ 的极大值位于 $\alpha = 0.78540 \approx \frac{1}{4}\pi$，其值为 $0.41421 \approx \sqrt{2} - 1$。

常见错误

- 由 $h = ust - \frac{1}{2}gt^2$ 解出 t_1 时取了较大的根；那其实是假如没有天花板，质点在下落途中经过高度 h 的时间。
- 写成 $D = R_1 - R_2$，这是负数：非弹性碰撞的质点落在较远处。
- 得出 $f'(\frac{1}{4}\pi) = 0$ 便停下来，没有证明这个驻点是极大值。

STEP 之外

对 P_1 所用的时间反演（time reversal）论证，让我们初次窥见一个深刻的事实：在保守力（conservative force）作用下，牛顿（Newton）定律在时间倒流时形式不变；完全弹性碰撞保持这种对称性，而非弹性碰撞（会损失能量）则破坏了它。介乎 0 与 1 之间的恢复系数（coefficient of restitution），会给出介乎这里求得的两个射程之间的结果。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）正是以这种精神处理碰撞与能量守恒。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。