详细解答

STEP III 1991，第 12 题

力学 · 曲线上的运动

> **STEP III 1991，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q12

关键思路

质点被约束在椭圆上，所以它的位置完全由单一参数 θ 决定。把位置向量（position vector）对时间求导两次，再把加速度投影到向内的单位法向量（inward unit normal）上：含 $\ddot{\theta}$ 的项会消去，因为它们沿切线方向。至于第二部分，当法向反作用力（normal reaction）降至零时，质点便离开表面；而管是光滑的，所以由能量守恒（energy conservation）可求得每一点的速率。

解答

法向加速度

我们把质点视为在光滑曲线上运动的一点，因此它只受两个力：向下的重量 mg，以及管所施的法向反作用力 R。

位置为 $\mathbf{r} = (a\cos\theta,\ b\sin\theta)$。利用链式法则（chain rule）对时间求导，

$$\dot{x} = -a\sin\theta\,\dot{\theta}, \qquad \dot{y} = b\cos\theta\,\dot{\theta},$$
$$\ddot{x} = -a\sin\theta\,\ddot{\theta} - a\cos\theta\,\dot{\theta}^2, \qquad \ddot{y} = b\cos\theta\,\ddot{\theta} - b\sin\theta\,\dot{\theta}^2.$$

切线方向为 $(-a\sin\theta,\ b\cos\theta)$，所以 $(b\cos\theta,\ a\sin\theta)$ 是一个法线方向（两者的点积（dot product）为 0）。在 $\theta = 0$ 时，它等于 $(b, 0)$，指向椭圆之外，因此向内的单位法向量为

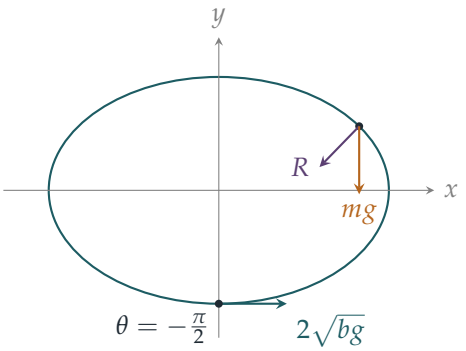
$$\mathbf{n} = -\frac{(b\cos\theta,\ a\sin\theta)}{D}, \qquad D = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}.$$

于是沿向内法线方向的加速度为

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{n} &= -\frac{1}{D}\Big[b\cos\theta(-a\sin\theta\,\ddot\theta - a\cos\theta\,\dot\theta^2) + a\sin\theta(b\cos\theta\,\ddot\theta - b\sin\theta\,\dot\theta^2)\Big]\\ &= -\frac{1}{D}\Big[-ab\,\dot\theta^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\Big] = \frac{ab\,\dot\theta^2}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}},\end{aligned}$$

因为两个含 $\ddot\theta$ 的项互相抵消。这正是所求的结果。

离开表面



最低点对应 $\theta=-\frac{\pi}{2}$，该处 $y=-b$。管是光滑的，所以反作用力不作功，能量守恒。设质点在参数为 θ 的点上速率为 v，则

$$\tfrac12 mv^2 + mgb\sin\theta = \tfrac12 m(4bg) - mgb \quad\Longrightarrow\quad v^2 = 2gb(1-\sin\theta).$$

由第一部分，$v^2 = \dot x^2+\dot y^2 = D^2\dot\theta^2$，所以 $\dot\theta^2 = v^2/D^2$。

现在沿向内法线 $\mathbf{n}$ 的方向分解各力。反作用力 R 沿 $\mathbf{n}$ 作用（质点在内侧，所以管向内推，而且只要仍有接触便有 $R\ge 0$）。重量为 $(0,-mg)$，它沿 $\mathbf{n}$ 的分量是 $(0,-mg)\cdot\mathbf{n} = mga\sin\theta/D$。由牛顿第二定律（Newton's second law）得

$$R + \frac{mga\sin\theta}{D} = \frac{m\,ab\,\dot\theta^2}{D} = \frac{m\,ab\,v^2}{D^3}, \qquad \text{所以} \qquad R = \frac{ma}{D^3}\Big(bv^2 - g\sin\theta\,D^2\Big).$$

想一想 为甚么重量的分量是 $+mga\sin\theta/D$，而不是带负号?

在上半部分（$\sin\theta>0$），向内法线有向下的分量，所以重力在那里有助把质点拉向内侧，情况就如在铅垂圆周的顶部一样。R 和重量的这个分量共同提供向心加速度（centripetal acceleration）。

现在代入 $a=\frac32 b$ 和 $v^2 = 2gb(1-\sin\theta)$，并记 $s=\sin\theta$。那么

$$D^2 = \tfrac94 b^2 s^2 + b^2(1-s^2) = b^2(1+\tfrac54 s^2),$$

所以

$$bv^2 - g\sin\theta\, D^2 = gb^2\left[2(1-s) - s(1+\tfrac{5}{4}s^2)\right] = -\tfrac{1}{4}gb^2(5s^3+12s-8).$$

由于 $ma/D^3 > 0$，R 的正负号与 $-(5s^3+12s-8)$ 的正负号相同。

质点在 R 首次变为零之处离开表面。函数 $p(s) = 5s^3+12s-8$ 严格递增（strictly increasing），因为 $p'(s) = 15s^2+12 > 0$，而且 $p(-1) = -25 < 0$，$p(1) = 9 > 0$。所以 p 在 $(-1,1)$ 内恰有一个根。质点由最低点上升时，s 由 -1 开始递增，在 s 到达该根之前一直有 $R > 0$。此外，对所有 $s < 1$ 都有 $v^2 = 2gb(1-s) > 0$，所以质点到达该处时仍在沿管向上运动。因此 R 首次变为零、质点离开表面的位置满足

$$5\sin^3\theta + 12\sin\theta - 8 = 0,$$

正如所求。数值上，$\sin\theta \approx 0.584$，所以质点在略高于轴的水平之处离开。

验算

- 若 $a = b = r$，法向加速度变成 $r\dot{\theta}^2 = v^2/r$，即熟悉的圆周运动结果。
- 在最低点，$R = m\left(\frac{bv^2}{a^2} + g\right)$，其中 $v^2 = 4bg$，其值为正（该处的曲率半径（radius of curvature）为 a^2/b），与 $p(-1) = -25 < 0$ 吻合。
- 取 $b = 1$、$a = 1.5$ 和 $g = 9.81$，我们由最低点开始，逐步对以 θ 表示的运动方程作数值积分。反作用力首次变为零时 $\sin\theta \approx 0.58379$，与三次方程的根 0.58377 相符（$\theta \approx 35.7°$）。

常见错误

- 把 θ 当作极角（polar angle）。除非 $a = b$，否则点 $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ 与 x 轴的夹角并不是 θ，法线也不沿半径方向。
- 以 v^2/b 或 v^2/a 作为法向加速度。在椭圆上，曲率半径逐点不同，而这正是第一部分所计算的。
- 弄错重量法向分量的正负号，结果三次式变成 $5s^3 - 4s + \ldots$，得不到合理的根。

STEP 之外

第一部分是法向加速度公式 v^2/ρ 的特殊情况，其中 ρ 是曲率半径。事实上，这个椭圆的 $\rho = D^3/(ab)$。把加速度分解为切向和法向两部分（弗勒内标架（Frenet frame）），是大学一年级力学和微分几何（differential geometry）的标准内容。以单一坐标 θ 处理约

束，自然引向拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对约束运动，以及极坐标和内禀坐标（intrinsic coordinates），都有很好的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。