详细解答

STEP III 1991，第 11 题

力学 • 刚体平衡

STEP III 1991，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

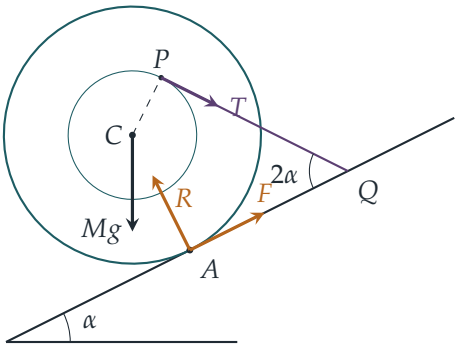
step.maths.org/questions/91-s3-q11

关键思路

圆柱体是一个刚体（rigid body），在四个力的作用下处于平衡（equilibrium）：重力、法向反作用力（normal reaction）、接触点处的摩擦力（friction），以及绳子的张力（tension）。其中重力和法向反作用力都通过圆柱体的中心，所以对中心取力矩（moments），便可把摩擦力与张力直接联系起来。再沿斜面方向和垂直于斜面方向分解力，就得到摩擦力和法向反作用力，余下的工作交给不等式 $F \leq \mu R$ 即可。在第二部分，圆柱体并不“知道”是甚么东西拉住绳子，所以张力不变，我们只需考虑质点。

解答

我们把圆柱体看作均匀刚体，其质心（centre of mass）就是它的中心 C；把绳子看作轻而不可伸长（light and inextensible）；把第二个物体看作质点（particle）。设 A 为圆柱体与斜面的接触点，并设绳子的张力为 T。由于绳子绕在凹槽上，自由的一段 PQ 在 P 点与凹槽相切，所以它的作用线与 C 的垂直距离为 a。由图可见，Q 在斜面上的位置比 A 更高，而绳子把圆柱体由 P 拉向 Q：既沿斜面向上，也压向斜面，与斜面成 2α 角。



虚线所示的半径 CP 长度为 a，并与绳子垂直。我们以 F 表示作用于圆柱体的摩擦力，以沿斜面向上为正。

圆柱体：证明 $\mu \geq \frac{1}{3}\tan\alpha$

对 C 取力矩。重力作用于 C，法向反作用力沿 AC 作用，所以两者对 C 都没有力矩。摩擦力的作用点与 C 相距 $2a$，张力的作用线与之垂直距离为 a，两者使圆柱体朝相反方向转动，所以

$$F \cdot 2a = T \cdot a, \qquad \text{即} \qquad T = 2F.$$

想一想 为甚么摩擦力和张力会使圆柱体朝相反方向转动?

只有这两个力对 C 有力矩，所以它们的力矩必须互相抵消。单靠绳子在 P 点的拉力，圆柱体会转动而沿斜面向上滚。A 点处沿斜面向上的摩擦力则使它朝另一方向转动。假如我们猜错了摩擦力的方向，下面的方程只会给出 $F < 0$，所以这个正负号并不是额外的假设。

沿斜面方向分解（以沿斜面向上为正）：

$$F + T\cos 2\alpha = Mg\sin\alpha \quad \Longrightarrow \quad F(1 + 2\cos 2\alpha) = Mg\sin\alpha.$$

垂直于斜面方向分解：张力有一个压向斜面的分量 $T\sin 2\alpha$，所以

$$R = Mg\cos\alpha + T\sin 2\alpha = Mg\cos\alpha + 2F\sin 2\alpha.$$

代入 $F = Mg\sin\alpha/(1 + 2\cos 2\alpha)$，

$$\begin{aligned} R(1 + 2\cos 2\alpha) &= Mg(\cos\alpha + 2\cos 2\alpha\cos\alpha + 2\sin 2\alpha\sin\alpha) \\ &= Mg(\cos\alpha + 2\cos(2\alpha - \alpha)) = 3Mg\cos\alpha. \end{aligned}$$

因此

$$F = \frac{Mg\sin\alpha}{1 + 2\cos 2\alpha}, \qquad R = \frac{3Mg\cos\alpha}{1 + 2\cos 2\alpha}.$$

圆柱体保持与斜面接触，所以 $R > 0$。由于 α 是锐角，$\cos\alpha > 0$，于是 $1 + 2\cos 2\alpha > 0$，这表示 $F > 0$ 亦成立。两式相除，

$$\frac{F}{R} = \frac{\sin\alpha}{3\cos\alpha} = \tfrac{1}{3}\tan\alpha.$$

要保持平衡，摩擦力必须满足 $F \le \mu R$，所以 $\mu \ge F/R = \frac{1}{3}\tan\alpha$，正是所要证明的结果。

质点：摩擦系数的最小值

绳子留在原来的位置，所以圆柱体的位置完全相同，它的三条方程也不变。特别是，张力仍然是

$$T = 2F = \frac{2Mg\sin\alpha}{1 + 2\cos 2\alpha}.$$

当 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ 时，我们有 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 和 $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$，所以

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{3}{5}, \qquad \sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{4}{5},$$

而 $1 + 2\cos 2\alpha = \frac{11}{5}$。因此

$$T = \frac{2Mg}{\sqrt{5}} \cdot \frac{5}{11} = \frac{2\sqrt{5}}{11} Mg.$$

（圆柱体同时需要 $\mu \ge \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$。）

现在考虑位于 Q 的质点。绳子把它拉向 P，也就是说，拉力有沿斜面向下的分量 $T\cos 2\alpha$，以及离开斜面的分量 $T\sin 2\alpha$。它的重力 $3Mg$ 同样有沿斜面向下的分量，所以作用于质点的摩擦力 F' 必定沿斜面向上。设作用于质点的法向反作用力为 R'。

沿斜面方向：

$$F' = 3Mg\sin\alpha + T\cos 2\alpha = \frac{3Mg}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{11} Mg = \frac{33\sqrt{5}}{55} Mg + \frac{6\sqrt{5}}{55} Mg = \frac{39\sqrt{5}}{55} Mg.$$

垂直于斜面方向：

$$R' = 3Mg\cos\alpha - T\sin 2\alpha = \frac{6Mg}{\sqrt{5}} - \frac{4}{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{11} Mg = \frac{66\sqrt{5}}{55} Mg - \frac{8\sqrt{5}}{55} Mg = \frac{58\sqrt{5}}{55} Mg.$$

这是正数，所以质点确实留在斜面上。平衡的条件是 $F' \le \mu' R'$，其中 μ' 是质点与斜面之间的摩擦系数（coefficient of friction），所以

$$\mu' \ge \frac{F'}{R'} = \frac{39}{58}.$$

摩擦系数的最小值是 $\dfrac{39}{58}$。

验算

- 改为对 A 取力矩，得 $T\,a(1+2\cos 2\alpha) = 2a\,Mg\sin\alpha$，张力相同。（由 A 到绳子的垂直距离是 $a+2a\cos 2\alpha$。）
- 当 $\alpha \to 0$ 时，斜面变成水平，张力和摩擦力都消失，而下界 $\frac{1}{3}\tan\alpha \to 0$，与预期相符。
- 数值验算：随机选取 10 000 个小于 60° 的锐角 α，用坐标建立几何图形，解出平衡方程，确认 $F/R = \frac{1}{3}\tan\alpha$。当 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ 时，结果是 $T \approx 0.4066\,Mg$、$F' \approx 1.5856\,Mg$、$R' \approx 2.3580\,Mg$，以及 $F'/R' \approx 0.67241 = 39/58$。

常见错误

- 忘记张力会把圆柱体压向斜面，令 R 增大。漏掉 $T\sin 2\alpha$ 会得出错误的比值。
- 弄错绳子对质点的拉力方向。绳子把质点拉向 P，所以它减少了作用于质点的法向反作用力，并加大了沿斜面向下的力。
- 在第二部分从头重新计算张力。圆柱体的平衡没有改变，所以 T 也没有改变。

STEP 之外

刚体静力学（statics）归结为两条向量方程：合力为零，以及对任何一点的总力矩为零。选好这一点是最主要的技巧；本题选的是中心，因为有两个未知的力通过它。到了大学，这会发展成对力系及其等效“力螺旋”（wrench）的研究。摩擦力问题还会引出平衡如何被破坏的问题：是滑动、滚动，还是翻倒。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对刚体静力学和转动有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。