详细解答

STEP III 1991，第 10 题

纯数学 · 牛顿恒等式

> **STEP III 1991，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q10

关键思路

这个多项式只有三个非零系数，所以对称函数（symmetric function）Σ_m 几乎全部为零，而题目给出的恒等式（牛顿恒等式，Newton's identity）就简化成一个只有两项的递推关系（recurrence）。次数超过 n 之后，这个恒等式不再适用，但有一个更简单的做法：每个根都满足方程本身，所以把方程乘以 α^k 再对所有根求和，便可把 S_{n+k} 与较早的幂和（power sum）联系起来。

解答

直到 S_{n-1} 的幂和

把 $x^n - qx^{n-1} + r$ 与 $\prod_i (x - \alpha_i) = x^n - \Sigma_1 x^{n-1} + \Sigma_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \Sigma_n$ 比较，可得

$$\Sigma_1 = q, \qquad \Sigma_2 = \Sigma_3 = \cdots = \Sigma_{n-1} = 0, \qquad (-1)^n \Sigma_n = r.$$

在题目给出的恒等式中取 $1 \le p \le n-1$。由于 $p \le n-1$，所有含有 $\Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$ 的项都等于零。（当 $p = 1$ 时，恒等式就是 $S_1 - \Sigma_1 = 0$。）剩下的是

$$S_p - q\, S_{p-1} = 0 \quad (2 \le p \le n-1), \qquad S_1 = q.$$

所以 $S_1 = q$，而每个幂和都是前一个的 q 倍。对 p 用归纳法（induction），得

$$S_p = q^p \qquad \text{对于} 1 \le p \le n-1,$$

这正是所要证明的结果。另外，由于每个 $\alpha_i^0 = 1$，顺带记下 $S_0 = n$ 会很方便。

S_n、S_{n+1} 和 S_{n+2}

当 $p = n$ 时，恒等式仍然适用，而这次最后一项会出现：

$$S_n - q\,S_{n-1} + (-1)^n n\,\Sigma_n = 0.$$

由于 $(-1)^n\Sigma_n = r$，由此得

$$S_n = q \cdot q^{n-1} - nr = q^n - nr.$$

想一想 题目给出的恒等式到 $p = n$ 就停了。怎样才能再走下去?

我们利用方程本身。每个根都满足 $\alpha_i^n = q\alpha_i^{n-1} - r$。乘以 α_i^k（其中 $k \geq 0$）再对 i 求和，得

$$S_{n+k} = q\,S_{n+k-1} - r\,S_k \qquad (k \geq 0). \tag{$*$}$$

取 $k = 0$，这再次给出 $S_n = q^n - nr$，是一个令人安心的交叉验证。现在

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= q\,S_n - r\,S_1 = q^{n+1} - nqr - qr = q^{n+1} - (n+1)qr, \\ S_{n+2} &= q\,S_{n+1} - r\,S_2 = q^{n+2} - (n+1)q^2r - q^2r = q^{n+2} - (n+2)q^2r. \end{aligned}$$

这里用到了 $S_1 = q$ 和 $S_2 = q^2$；它们成立，是因为 $n \geq 5$ 保证了 $2 \leq n-1$。

一般公式

从 $S_n = q^n - nr$、$S_{n+1} = q^{n+1} - (n+1)qr$、$S_{n+2} = q^{n+2} - (n+2)q^2r$ 这个规律，可以猜想

$$S_{n+m} = q^{n+m} - (n+m)\,q^m r \qquad \text{对于} 0 \leq m \leq n-1.$$

我们对 m 用归纳法来证明。$m = 0$ 的情况就是 $S_n = q^n - nr$，上面已经证明。

假设公式对某个 $m-1$ 成立，其中 $1 \leq m \leq n-1$。在 $(*)$ 中取 $k = m$，得

$$\begin{aligned} S_{n+m} &= q\,S_{n+m-1} - r\,S_m \\ &= q(q^{n+m-1} - (n+m-1)q^{m-1}r) - r\,q^m \\ &= q^{n+m} - (n+m)\,q^m r, \end{aligned}$$

其中用到了 $S_m = q^m$，这是因为 $1 \leq m \leq n-1$ 才成立。这就是 m 的情况下的公式。根据归纳法，公式对所有 $0 \leq m \leq n-1$ 成立，即对 $m < n$ 成立。

想一想 条件 $m < n$ 究竟在哪里用到?

只在 $S_m = q^m$ 这一步。当 $m = n$ 时，我们需要的是 S_n，而它等于 $q^n - nr$，不是 q^n，于是多出来的 $-nr$ 会带进计算之中，规律就此打破。事实上，由 $(*)$ 可得 $S_{2n} = q^{2n} - 2nq^nr + nr^2$。

验算

- 当 $r = 0$ 时，方程是 $x^{n-1}(x-q) = 0$，根为 q 和 0（重复 $n-1$ 次），所以每个 $S_k = q^k$。我们所有的公式都化为这个结果。
- 当 $q = 0$ 时，各根就是 $-r$ 的 n 次方根。于是对于 $1 \le p \le n-1$ 有 $S_p = 0$，而 $S_n = n \cdot (-r) = -nr$，与 $q^n - nr$ 吻合。
- 数值上，我们对随机选取的 q, r 和 $5 \le n \le 9$ 求出所有根，再把它们的幂加起来。$S_p = q^p$ 以及 S_{n+m} 的公式（$0 \le m \le n-1$）都吻合至约 10^{-12} 的误差，而在 $m = n$ 时公式明显不成立。

常见错误

- 忘记恒等式最后一项的因子 p，结果得出 $S_n = q^n - r$ 而不是 $q^n - nr$。
- 弄错 Σ_n 的正负号：常数项是 $(-1)^n \Sigma_n$，所以不论 n 是奇是偶，都有 $(-1)^n n\Sigma_n = nr$。
- 在 $p > n$ 时套用题目给出的恒等式，而照题目所写的形式，它在这个范围并不成立。

STEP 之外

这些就是牛顿恒等式，而 $(*)$ 表明各幂和满足一个线性递推关系（linear recurrence），其特征多项式（characteristic polynomial）正是原来的方程。用矩阵（matrix）的语言来说，S_k 是 A^k 的迹（trace），其中 A 是该多项式的友矩阵（companion matrix）。各根的任何对称多项式（symmetric polynomial）都可以用 Σ_m 表示，这个事实就是对称多项式基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials），由此可以通往伽罗瓦理论（Galois theory）。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）是了解这套代数如何展开的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。