详细解答

STEP III 1991，第 1 题

纯数学 · 级数与展开式

> **STEP III 1991，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s3-q1

关键思路

三个部分都值得先想一想才动手计算。在 (i) 中，部分分式（partial fractions）把和式拆成可以裂项相消（telescope）的几部分。在 (ii) 中，三次式 $1+x+x^2+x^3$ 是一个等比级数（geometric series），因此可以写成两个非常简单的式子之商，而对数亦随之分拆成两个标准级数。在 (iii) 中，先把指数写成级数；由于它由 x^2 开始，指数级数（exponential series）中只有头几项能够到达 x^4。

解答

第 (i) 部分

我们要找出常数，使得

$$\frac{6}{r(r+1)(r+3)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{r+1} + \frac{C}{r+3}.$$

利用掩盖法（cover-up rule），$A = \dfrac{6}{1\cdot 3} = 2$，$B = \dfrac{6}{(-1)(2)} = -3$ 及 $C = \dfrac{6}{(-3)(-2)} = 1$。（快速检查一下：$A+B+C=0$，这是必然的，因为当 r 很大时，左方的表现有如 $6/r^3$，并没有 $1/r$ 项。）

系数 $2, -3, 1$ 之和为零，这提示我们把它们拆成 $2-2$ 和 $-1+1$：

$$\frac{6}{r(r+1)(r+3)} = 2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) - \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+3}\right).$$

现在每个括号都可以裂项相消。第一个给出

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

在第二个之中，两项相隔两步，因此两端各有两项留下：

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r+3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}.$$

把它们合起来，

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}\frac{6}{r(r+1)(r+3)}&=2-\frac{2}{n+1}-\frac{5}{6}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\\&=\frac{7}{6}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}.\end{aligned}$$

第 (ii) 部分

想一想 $1+x+x^2+x^3$ 有没有更简洁的写法?

它是公比为 x 的等比级数，所以当 $x\neq 1$ 时

$$1+x+x^2+x^3=\frac{1-x^4}{1-x}.$$

当 $|x|<1$ 时，$1-x^4$ 和 $1-x$ 均为正数，所以我们可以把对数拆开：

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=\ln(1-x^4)-\ln(1-x).$$

利用 $\ln(1-y)=-\sum_{k\geq 1}y^k/k$，此式对 $|y|<1$ 成立（而这里亦有 $|x^4|<1$），

$$-\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k},\qquad \ln(1-x^4)=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{4m}}{m}.$$

第二个级数只涉及 k 为 4 的倍数的幂 x^k。对于这样的 $k=4m$，合并后的系数为

$$\frac{1}{4m}-\frac{1}{m}=-\frac{3}{4m}=-\frac{3}{k}.$$

因此

$$\ln(1+x+x^2+x^3)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots,$$

而通项为

$$\frac{x^k}{k}\ \text{若}\ 4\nmid k,\qquad -\frac{3x^k}{k}\ \text{若}\ 4\mid k.$$

每个系数都不是零，所以上面列出的五项就是首五个非零项。

第 (iii) 部分

当 $-1<x\leq 1$ 时，我们有 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$，所以

$$u=x\ln(1+x)=x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}-\cdots.$$

想一想 $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \cdots$ 之中，我们需要多少项?

由于 u 由 x^2 开始，u^k 这一项便由 x^{2k} 开始。所以 u^3 及其后各项对 x^4 或以下的项毫无贡献，而从 u^2 我们只需要它的首项 x^4。因此

$$\begin{aligned} e^{x\ln(1+x)} &= 1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{2}x^4 + \cdots \\ &= 1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} + \cdots . \end{aligned}$$

（当然，$e^{x\ln(1+x)}$ 其实就是 $(1+x)^x$。）

验算

- 在 (i) 中，$n = 1$ 给出 $\frac{7}{6} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$，与单独一项 $\frac{6}{1\cdot 2\cdot 4}$ 吻合。令 $n \to \infty$，便得无穷项之和 $\frac{7}{6}$。
- 在 (ii) 中，直接展开至二阶：取 $\ln(1+y) \approx y - \frac{y^2}{2}$，其中 $y = x + x^2 + \cdots$，得出 $x + x^2 - \frac{x^2}{2} = x + \frac{x^2}{2}$，与我们的首两项一致。数值上，在 $x = 0.5$ 时，把级数加至很多项，结果与 $\ln 1.875 \approx 0.6286$ 吻合。
- 在 (iii) 中，在 $x = 0.01$ 时，展开式与 $(1.01)^{0.01}$ 相差约 7.4×10^{-11}，其大小属 x^5 的量级，正如所料（下一个系数原来是 $-\frac{3}{4}$）。

常见错误

- 在 (i) 中，忘记了相隔两步的裂项和会在两端各留下两项，而不是一项。
- 在 (ii) 中，把 x^4 的系数写成 $\frac{1}{4} - 1$，但其后却把通项写成 $(-1)^{k+1}x^k/k$ 或类似的式子；其实规律取决于 k 除以 4 的余数。
- 在 (iii) 中，漏掉 $\frac{1}{2}u^2$ 这一项：它贡献了 $\frac{1}{2}x^4$。

STEP 之外

第 (iii) 部分是幂级数（power series）复合的一个小例子，而追踪每一项中最低次幂这个记帐技巧，正是大学里处理渐近展开式（asymptotic expansions）的方法。幂级数何时收敛，以及为何在收敛半径（radius of convergence）之内可以随意把它们相加、相乘和复合，这些问题都是分析学（analysis）入门课程的内容；Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门教材）对此有清晰的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。