详细解答

STEP II 1991，第 8 题

纯数学 · 非线性一阶常微分方程

STEP II 1991，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s2-q8

关键思路

两条微分方程（differential equation）都是关于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的二次方程（quadratic），所以我们可以先用代数方法解出导数（derivative），然后才积分。每条二次方程有两个根，于是得到两条候选的一阶方程，而 $x = 0$ 处的条件决定了哪一个分支（branch）可取。双曲恒等式（hyperbolic identities），尤其是 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 和半角公式（half-angle formulae），可令这些根保持简洁。

解答

二次方程

由二次公式（quadratic formula），

$$u = \frac{-2\sinh x \pm \sqrt{4\sinh^2 x + 4}}{2} = -\sinh x \pm \sqrt{\sinh^2 x + 1} = -\sinh x \pm \cosh x,$$

当中用到 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 和 $\cosh x > 0$。由于 $\cosh x - \sinh x = \mathrm{e}^{-x}$ 而 $\cosh x + \sinh x = \mathrm{e}^{x}$，两个根是

$$u = \mathrm{e}^{-x} \qquad 或 \qquad u = -\mathrm{e}^{x}.$$

（验算：两根之积是 -1，两根之和是 $\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x} = -2\sinh x$，与应有的结果相符。）

第一条微分方程

取 $u = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，这正是上面的二次方程，所以对每一个 x，要么 $y' = \mathrm{e}^{-x}$，要么 $y' = -\mathrm{e}^{x}$。

想一想 y' 会不会在某些 x 值上取其中一个根，而在其他地方取另一个根?

不会。第一个根恒为正，第二个根恒为负，所以两者永不相遇。导数具有介值性质（intermediate value property）（达布定理（Darboux's theorem）；如果你假设 y' 连续，则用普通的介值定理（intermediate value theorem）即可），所以 y' 不可能由正值跳到负值而不经过 0，但两个根都不会取这个值。因此 y' 自始至终都停留在同一个根上。

在 $x=0$ 处, 两个根是 1 和 -1, 而我们需要 $y'>0$, 所以 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{-x}$。积分得 $y=-\mathrm{e}^{-x}+c$, 而由 $x=0$ 时 $y=0$ 可得 $c=1$:

$$\boxed{y=1-\mathrm{e}^{-x}}$$

第二条微分方程

设 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则 $p^2\sinh x+2p-\sinh x=0$。

当 $x=0$ 时，$\sinh 0=0$，方程简化为 $2p=0$，所以必定有 $y'(0)=0$。

当 $x\neq 0$ 时，$\sinh x\neq 0$，由二次公式得

$$p=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\sinh^2 x}}{2\sinh x}=\frac{-1\pm\cosh x}{\sinh x}.$$

利用 $\cosh x=1+2\sinh^2\frac{x}{2}=2\cosh^2\frac{x}{2}-1$ 和 $\sinh x=2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}$，两个根可化简为

$$\frac{\cosh x-1}{\sinh x}=\frac{2\sinh^2\frac{x}{2}}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}=\tanh\frac{x}{2},$$

$$\frac{-1-\cosh x}{\sinh x}=-\frac{2\cosh^2\frac{x}{2}}{2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}}=-\coth\frac{x}{2}.$$

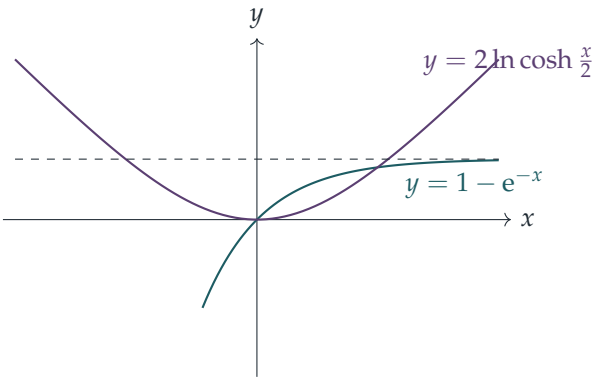
选择分支。第二个根 $-\coth\frac{x}{2}$ 当 $x\to 0$ 时无界，把它积分得 $y=-2\ln|\sinh\frac{x}{2}|+c$，而无论从哪一侧取 $x\to 0$，这个函数都趋向 $+\infty$。所以在原点的任何一侧，这个分支都不能给出在 $x=0$ 处连续且满足 $y(0)=0$ 的解。因此在 $x=0$ 附近（每一侧）我们都必须取第一个根，而由于 $\tanh 0=0$，这与 $y'(0)=0$ 吻合。两个根永不重合（一个与 x 同号，另一个异号，而且当 $x\neq 0$ 时两者都不为零），所以根据与之前相同的介值论证，对所有 x，解都停留在这个分支上:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tanh\frac{x}{2}\quad\text{对所有}x.$$

由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sinh\frac{x}{2}$，我们有 $\tanh\frac{x}{2}=2\cdot\frac{\frac{1}{2}\sinh\frac{x}{2}}{\cosh\frac{x}{2}}$，这属于 $2f'/f$ 的形式，所以积分得 $y=2\ln\cosh\frac{x}{2}+c$（因为 $\cosh>0$，无须加上绝对值符号）。由条件 $y(0)=0$ 得 $c=0$，所以

$$\boxed{y=2\ln\cosh\tfrac{x}{2}=\ln\left(\frac{1+\cosh x}{2}\right)}$$

其中第二个形式由 $2\cosh^2\frac{x}{2} = 1 + \cosh x$ 得出。



验算

- 对于 $y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$：$y'^2 + 2y'\sinh x = \mathrm{e}^{-2x} + \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}) = 1$，符合要求，而且 $y'(0) = 1 > 0$。
- 对于 $y = 2\ln\cosh\frac{x}{2}$，设 $t = \tanh\frac{x}{2}$，则 $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$；于是 $\sinh x\,(t^2-1) + 2t = -2t + 2t = 0$。这个解是偶函数，这是理所当然的，因为方程在 $x \mapsto -x$、$y \mapsto y$ 之下保持不变。
- 数值上，在 $x = 1$ 处两个解分别是 $1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0.6321$ 和 $2\ln\cosh\frac{1}{2} \approx 0.2402$；在许多随机选取的点代入有限差分导数，两条方程都成立，误差在 10^{-6} 以内。

常见错误

- 把第二条方程除以 $\sinh x$, 却没有留意它在 $x = 0$ 处为零, 而那里正是初始条件（initial condition）所在之处；原方程迫使 $y'(0) = 0$。
- 在第二部分保留两个分支：$-\coth\frac{x}{2}$ 这个分支不可能满足 $y(0) = 0$，因为它的积分在原点处趋向无穷。

STEP 之外

对 y' 并非线性的方程，例如 $F(x, y, y') = 0$，可以有多个解通过同一点，或者出现没有任何单一分支能够描述的“奇异”解（singular solution），所以存在性与唯一性定理（existence and uniqueness theorems，即 Picard–Lindelöf 定理）都是针对已经解成 $y' = f(x, y)$ 形式的方程而叙述的。在这里两个根互相分隔，所以每个分支都表现良好；

当判别式（discriminant）可以为零时，各分支可以黏合起来，唯一性便不再成立。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（基础微分方程教科书）讨论了存在性、唯一性以及这些非线性一阶方程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。