详细解答

STEP II 1991，第 7 题

纯数学 · 函数方程

STEP II 1991，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s2-q7

关键思路

函数方程（functional equation）对所有 x 和 y 都成立，因此我们可以固定其中一个变量，对另一个变量求导。这样便把它化为一条微分方程（differential equation），把 g' 在两个不同点的值联系起来。然后巧妙地选取其中一个变量的值，就能确定 g' 在各处的值，最后积分便大功告成。全篇我们都跟题目一样，假设 g 和 f 可导（differentiable）。

解答

导数关系式

固定 $y>0$，把 $\mathrm{g}(x)+\mathrm{g}(y)=\mathrm{g}(z)$ 对 x 求导。由于 $\mathrm{g}(y)$ 此时是常数，由链式法则（chain rule）得

$$\mathrm{g}'(x)=\mathrm{g}'(z)\,\frac{\partial z}{\partial x}.$$

由商法则（quotient rule），

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y(x+y+1)-xy}{(x+y+1)^2}=\frac{y^2+y}{(x+y+1)^2},$$

这就是第一个形式。至于第二个形式，留意 $z+1$ 可以漂亮地因式分解：

$$z+1=\frac{xy+x+y+1}{x+y+1}=\frac{(x+1)(y+1)}{x+y+1},\qquad\text{所以}\qquad z(z+1)=\frac{xy(x+1)(y+1)}{(x+y+1)^2}.$$

除以 $x(x+1)$ 后恰好得到 $\dfrac{y(y+1)}{(x+y+1)^2}$，所以

$$\mathrm{g}'(x)=\frac{y^2+y}{(x+y+1)^2}\,\mathrm{g}'(z)=\frac{z(z+1)}{x(x+1)}\,\mathrm{g}'(z),$$

正如所求。值得把它写成以下的对称形式：

$$x(x+1)\,\mathrm{g}'(x) = z(z+1)\,\mathrm{g}'(z). \qquad (\dagger)$$

推导 $2\mathrm{g}'(1) = (u^2+u)\mathrm{g}'(u)$

> **想一想** 我们想得到一个对 $(0,1)$ 内每一个 u 都成立的结论。应该固定哪一个变量？固定在甚么值？

在 $(\dagger)$ 中代入 $x=1$；左边变成 $2\mathrm{g}'(1)$，而 $z = \dfrac{y}{y+2}$。当 y 取遍 $(0,\infty)$ 时，$\dfrac{y}{y+2} = 1 - \dfrac{2}{y+2}$ 由 0 连续地递增并趋向 1，所以它取遍所有满足 $0<u<1$ 的值 u（具体来说，$y = \frac{2u}{1-u}$）。因此

$$2\mathrm{g}'(1) = (u^2+u)\,\mathrm{g}'(u) \qquad \text{对所有} 0<u<1.$$

积分

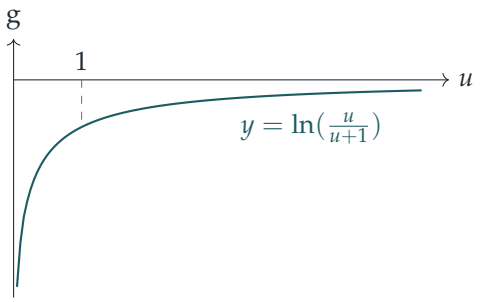
设 $A = 2\mathrm{g}'(1)$，这是一个常数。那么对 $0<u<1$，利用部分分式（partial fractions），

$$\mathrm{g}'(u) = \frac{A}{u(u+1)} = A\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}\right),$$

再积分（各项皆为正数，所以不需要绝对值符号），

$$\mathrm{g}(u) = A(\ln u - \ln(u+1)) + B = A\ln\left(\frac{u}{u+1}\right) + B.$$

其实这条公式对每一个 $u>0$ 都成立，而不只是 $u<1$。对固定的 x，当 y 由 0 增至 ∞ 时，$z = \dfrac{xy}{x+y+1}$ 由 0 递增并趋向 x，所以我们可以选取 y 使得 $z<1$。这样，由 $(\dagger)$ 和上面的结果可得 $x(x+1)\mathrm{g}'(x) = z(z+1)\mathrm{g}'(z) = A$。因此同样的积分在整个 $(0,\infty)$ 上都适用，而且只有一个常数 B，因为 $(0,\infty)$ 是一个区间。



（图中所示的曲线是 $A=1$、$B=0$ 的情况：它取负值、递增，并且当 $u\to\infty$ 时趋向 0。）

验证 $(*)$ 并求 B

代入 $\mathrm{g}(u) = A\ln\frac{u}{u+1} + B$。$(*)$ 的左边是

$$\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(y) = A\ln\frac{xy}{(x+1)(y+1)} + 2B.$$

至于右边，利用先前求得的 $z+1$ 的因式分解，可得

$$\frac{z}{z+1} = \frac{xy}{x+y+1}\cdot\frac{x+y+1}{(x+1)(y+1)} = \frac{xy}{(x+1)(y+1)},$$

所以

$$\mathrm{g}(z) = A\ln\frac{xy}{(x+1)(y+1)} + B.$$

两边对所有 $x, y > 0$ 都相等，当且仅当 $2B = B$，即 $B = 0$。所以 $\mathrm{g}(u) = A\ln\dfrac{u}{u+1}$ 满足 $(*)$。

能否确定 A?

不能。上面的验证对 A 的每一个值都成立，包括 $A = 0$（零函数）。定义 $A = 2\mathrm{g}'(1)$ 也帮不上忙：对我们的解而言，$\mathrm{g}'(1) = A(1-\frac{1}{2}) = \frac{A}{2}$，所以 $A = 2\mathrm{g}'(1)$ 自动成立，并没有提供任何新信息。方程 $(*)$ 对 g 而言是线性的，所以一个解的任何倍数仍然是解，而 A 正是这个比例因子。

函数 f

同样的方法也适用。固定 $y > 0$，把 $\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(y) = \mathrm{f}(xy)$ 对 x 求导:

$$\mathrm{f}'(x) = y\,\mathrm{f}'(xy).$$

> **想一想** 在这里，与代入 $x = 1$ 相对应的做法是甚么?

代入 $x = 1$，得 $\mathrm{f}'(1) = y\,\mathrm{f}'(y)$ 对每一个 $y > 0$ 都成立，所以设 $C = \mathrm{f}'(1)$，便有

$$\mathrm{f}'(y) = \frac{C}{y} \qquad\Longrightarrow\qquad \mathrm{f}(y) = C\ln y + D \quad (y > 0).$$

代回原式，$\mathrm{f}(x) + \mathrm{f}(y) = C\ln(xy) + 2D$，而 $\mathrm{f}(xy) = C\ln(xy) + D$，所以 $D = 0$。（等价地，在方程中取 $x = y = 1$ 得 $2\mathrm{f}(1) = \mathrm{f}(1)$，所以 $\mathrm{f}(1) = 0$。）因此 $\mathrm{f}(x) = C\ln x$，正如所求，而 C 同样是任意的。

验算

▶ 取 $x = 1$、$y = 2$：则 $z = \frac{1}{2}$，而两个导数因子分别是 $\frac{6}{16}$ 和 $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{8}$，两者相符。

- 取 $A = 1$：$\mathrm{g}(1) + \mathrm{g}(2) = \ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} = \ln\frac{1}{3}$，而 $\mathrm{g}(\frac{1}{2}) = \ln\frac{1/2}{3/2} = \ln\frac{1}{3}$。✓
- 我们用电脑以有限差分（finite differences）在 1000 个随机点上核实了导数恒等式，并对 A 的若干个值核实了 $\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(y) - \mathrm{g}(z)$ 恰好等于 B（所以只有当 $B = 0$ 时才等于零）。

常见错误

- 对 x 求导时忘记 $\mathrm{g}(y)$ 是常数，或者漏掉链式法则的因子 $\partial z/\partial x$。
- 代入了 $x = 1$，却没有检查 z 是否真的取遍整个 $(0, 1)$；正是这一步，把单独一条等式变成对每一个 u 都成立的结论。
- “因为积分常数无关重要”而假定 B 必定是 0：其实是方程 $(*)$ 迫使 $B = 0$，而这一点需要证明。

STEP 之外

第二条方程是柯西（Cauchy）对数型函数方程：代入 $x = \mathrm{e}^s$ 便把它化为 $h(s+t) = h(s) + h(t)$。这里我们假设了可导性；在大学第一门分析课程中，你会看到只要在单独一点连续（continuity），就已经足以迫使 $h(s) = cs$，而如果完全没有任何正则性条件，就会出现怪异的非线性解（利用哈默尔基（Hamel basis）构造而成）。第一条方程其实是同一回事的变相：$w = \ln\frac{u}{u+1}$ 把 $(*)$ 变换成加性方程。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本实分析入门书）是阅读这类连续性论证的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。