详细解答

STEP II 1991，第 6 题

纯数学 · 积分的界限

STEP II 1991，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s2-q6

关键思路

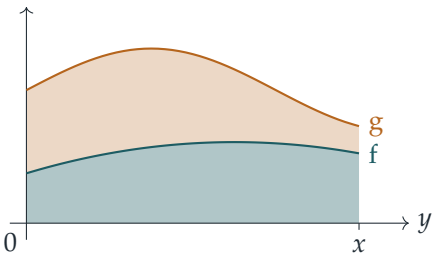
由 0 到 x 的积分（integral）就是面积，而一个较小的非负函数所围出的面积也较小。只要反复运用这一个事实，就能把已知的不等式（inequality）变成新的不等式。把 $0 \le \cos y \le 1$ 积分，得到 $\sin x$ 的一个界（bound）；再把它积分，得到 $\cos x$ 的一个界；再积分一次，便得到 $\sin x$ 更精确的界。之后每个积分的界，都是把被积函数（integrand）夹在两个可以准确积分的函数之间而得出的。

解答

比较积分

由于在 $[0, x]$ 上 $\mathrm{f}(y) \ge 0$，f 的图像位于 y 轴之上或刚好在轴上，所以 $\int_0^x \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y$ 是图像与轴之间的面积，必为非负。由于 $\mathrm{f}(y) \le \mathrm{g}(y)$，f 之下的区域包含在 g 之下的区域之内，所以它的面积不会更大：

$$0 \le \int_0^x \mathrm{f}(y)\,\mathrm{d}y \le \int_0^x \mathrm{g}(y)\,\mathrm{d}y.$$



（以分析方式说明：$\mathrm{g} - \mathrm{f} \ge 0$，所以 $\int_0^x (\mathrm{g} - \mathrm{f})\,\mathrm{d}y \ge 0$，而积分是线性的。）

$\sin x$ 与 $\cos x$ 的界

取 $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$。对于 $0 \le y \le x$，我们有 $0 \le \cos y \le 1$，所以在上述结果中取 $\mathrm{f} = \cos$、$\mathrm{g} = 1$，得

$$0 \le \int_0^x \cos y \,\mathrm{d}y \le \int_0^x 1 \,\mathrm{d}y, \qquad \text{即} \qquad 0 \le \sin x \le x.$$

这对 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 内的每一个 x 都成立，所以特别地，当 $0 \le y \le x$ 时有 $0 \le \sin y \le y$。再次应用该结果，这次取 $\mathrm{f} = \sin$、$\mathrm{g}(y) = y$：

$$\int_0^x \sin y \,\mathrm{d}y \le \int_0^x y \,\mathrm{d}y \quad \Longrightarrow \quad 1 - \cos x \le \tfrac{1}{2}x^2 \quad \Longrightarrow \quad \cos x \ge 1 - \tfrac{1}{2}x^2.$$

第一个积分

在 $[0, \frac{1}{10}]$ 上（完全位于 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 之内），我们现在有 $1 - \frac{1}{2}x^2 \le \cos x \le 1$，所以

$$3 - \tfrac{1}{2}x^2 \le 2 + \cos x \le 3.$$

> **想一想** 我们可以直接平方再取倒数吗?

可以，因为这里每一个量都是正数：$3 - \frac{1}{2}x^2 \ge 3 - \frac{1}{200} > 0$。对正数而言，平方会保持大小次序，取倒数（reciprocal）则会把次序倒转。然后乘以 $x \ge 0$，得

$$\frac{x}{9} \le \frac{x}{(2+\cos x)^2} \le \frac{x}{(3 - \frac{1}{2}x^2)^2} \qquad (0 \le x \le \tfrac{1}{10}).$$

三个函数全都非负，所以我们可以由 0 积分到 $\frac{1}{10}$。左边给出

$$\int_0^{1/10} \frac{x}{9} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{1800}.$$

至于右边，分子 x 除正负号外正是 $3 - \frac{1}{2}x^2$ 的导数（derivative），而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3 - \frac{1}{2}x^2)^{-1} = x(3 - \frac{1}{2}x^2)^{-2}$。所以

$$\int_0^{1/10} \frac{x}{(3 - \frac{1}{2}x^2)^2} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3 - \frac{1}{2}x^2}\right]_0^{1/10} = \frac{200}{599} - \frac{1}{3} = \frac{600 - 599}{1797} = \frac{1}{1797}.$$

因此

$$\frac{1}{1800} \le \int_0^{1/10} \frac{x}{(2+\cos x)^2} \,\mathrm{d}x \le \frac{1}{1797}.$$

$\sin x$ 更精确的界

对于 $0 \le y \le x \le \frac{1}{2}\pi$，我们有 $\cos y \ge 1 - \frac{1}{2}y^2$，即 $0 \le 1 - \cos y \le \frac{1}{2}y^2$（左边的不等式成立是因为 $\cos y \le 1$）。由 0 积分到 x：

$$\int_0^x (1 - \cos y) \,\mathrm{d}y \le \int_0^x \tfrac{1}{2}y^2 \,\mathrm{d}y \quad \Longrightarrow \quad x - \sin x \le \tfrac{1}{6}x^3 \quad \Longrightarrow \quad \sin x \ge x - \tfrac{1}{6}x^3.$$

第二个积分

在 $[0, \frac{1}{10}]$ 上，我们有 $x - \frac{1}{6}x^3 \le \sin x \le x$，所以

$$1 - \tfrac{1}{6}x^3 \le 1 - x + \sin x \le 1.$$

> **想一想** 为甚么应该考虑这个组合?

分母中的 $-x$ 正是用来抵消 $\sin x$ 的首项，余下 1 加上一个 x^3 阶的量。下界 $1 - \frac{1}{6}x^3 \ge 1 - \frac{1}{6000}$ 是正数，所以和之前一样，我们先平方，再取倒数（次序倒转），然后乘以 $x^2 \ge 0$：

$$x^2 \le \frac{x^2}{(1 - x + \sin x)^2} \le \frac{x^2}{(1 - \frac{1}{6}x^3)^2}.$$

积分后，左边给出 $\int_0^{1/10} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1000} = \frac{1}{3000}$。至于右边，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 - \frac{1}{6}x^3)^{-1} = \frac{1}{2}x^2(1 - \frac{1}{6}x^3)^{-2}$，所以

$$\int_0^{1/10} \frac{x^2}{(1 - \frac{1}{6}x^3)^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^3}\right]_0^{1/10} = 2\left(\frac{6000}{5999} - 1\right) = \frac{2}{5999}.$$

因此

$$\frac{1}{3000} \le \int_0^{1/10} \frac{x^2}{(1 - x + \sin x)^2}\,\mathrm{d}x \le \frac{2}{5999}.$$

验算

- 用辛普森法则（Simpson's rule）得 $\int_0^{1/10} x(2 + \cos x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 0.00055648$，介乎 $1/1800 \approx 0.00055556$ 与 $1/1797 \approx 0.00055648$ 之间（上界极为贴近：两者相差仅约 5×10^{-10}）。
- 同样地，$\int_0^{1/10} x^2(1 - x + \sin x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 0.000333389$，介乎 $1/3000 \approx 0.000333333$ 与 $2/5999 \approx 0.000333389$ 之间。
- 在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 内随机抽取的 10^5 个点上，三个逐点不等式全部成立，并在 $x = 0$ 时取等号。

常见错误

- 没有检查正负号就取倒数：只有当 a 与 b 同号时，$a \le b$ 才能推出 $1/a \ge 1/b$。
- 忘记了比较积分的结果需要 f ≥ 0 才能得出左边的不等式；这里是由 $\sin y \ge 0$ 和 $1 - \cos y \ge 0$ 提供这个条件。
- 用 $\cos x \le 1$ 这个界来求积分的上界：$\cos x \le 1$ 令分母小于 9，得出的是下界 $1/1800$，而不是上界。

STEP 之外

反复把 $0 \leq \cos y \leq 1$ 积分，可以得出一整串正负交错的泰勒（Taylor）界 $x - \frac{1}{6}x^3 \leq \sin x \leq x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \leq \cdots$，这是证明 sin 和 cos 的泰勒级数（Taylor series）收敛（converge）于它们本身的其中一种方法。积分的单调性（monotonicity）以及被积函数的比较，都是实分析（real analysis）的基本工具，用来估计余项、误差和极限的界。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本实分析入门书）仔细地建立了积分理论和带余项的泰勒定理（Taylor's theorem）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。