详细解答

STEP II 1991，第 5 题

纯数学 · 积分归约公式

> **STEP II 1991，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q5

关键思路

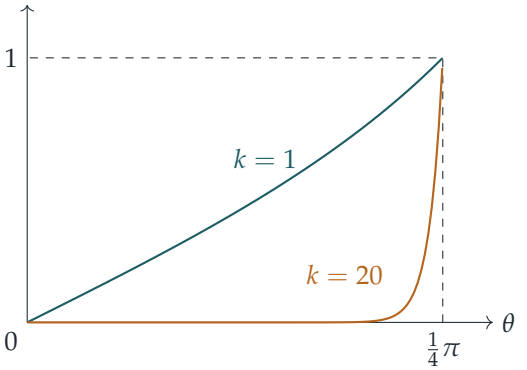
记 $I_k = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\,\mathrm{d}\theta$。tan 的奇数次幂和偶数次幂都不能直接积分，但把相隔两次的两个幂相加就可以：$\tan^k\theta + \tan^{k+2}\theta = \tan^k\theta\sec^2\theta$，而这正是 $\tan^{k+1}\theta/(k+1)$ 的导数（derivative）。由此得到的归约公式（reduction formula），用归纳法（induction）逐层展开，便得出所求的公式；而 k 很大时的草图告诉你积分会缩小至零，正是这一点把公式变成无穷级数（infinite series）的和。

解答

草图

在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上，$0 \le \tan\theta \le 1$，且 $\tan 0 = 0$，$\tan\frac{1}{4}\pi = 1$。当 $k = 1$ 时，图像由 $(0,0)$ 上升至 $(\frac{1}{4}\pi, 1)$，并稍微向上弯曲（起点的斜率为 1，终点的斜率为 $\sec^2\frac{1}{4}\pi = 2$）。

当 $k \gg 1$ 时，$\tan\theta$ 每一个小于 1 的值经过高次乘方后都被压向 0，而两端的值 0 和 1 则保持不变。因此 $\tan^k\theta$ 在区间的大部分范围内都紧贴横轴，到了非常接近 $\theta = \frac{1}{4}\pi$ 之处才急升至 1。事实上，设 $\theta = \frac{1}{4}\pi - u$，其中 u 很小，则 $\tan\theta \approx 1 - 2u$，所以 $\tan^k\theta \approx (1-2u)^k \approx \mathrm{e}^{-2ku}$：这个尖峰的宽度约为 $1/(2k)$，其下的面积约为 $1/(2k)$。



归约公式

对 $k \geq 0$,

$$I_k + I_{k+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\,(1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4} \tan^k\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{\tan^{k+1}\theta}{k+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{k+1}.$$

我们还需要两个初始值：

$$I_0 = \tfrac{1}{4}\pi, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \Big[-\ln\cos\theta\Big]_0^{\pi/4} = -\ln\tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

奇数次幂

设 $J_n = I_{2n+1}$。在归约公式中取 $k = 2n-1$，得

$$J_n = \frac{1}{2n} - J_{n-1} \qquad (n \geq 1).$$

我们用归纳法证明所求的公式。当 $n = 1$ 时：$J_1 = \frac{1}{2} - J_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 = (-1)^1(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2})$，这正是 $n = 1$ 时的公式。

假设公式对 $n-1 \geq 1$ 成立。则

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{1}{2n} - (-1)^{n-1}\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{2m}\right) \\ &= (-1)^n\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{2m}\right) + (-1)^n\frac{(-1)^n}{2n} \\ &= (-1)^n\left(\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^m}{2m}\right), \end{aligned}$$

其中利用了 $(-1)^n(-1)^n = 1$，把 $\frac{1}{2n}$ 写成括号内 $m = n$ 的一项。根据归纳法，公式对所有正整数 n 成立，证毕。

第一个级数

想一想 我们怎样知道 $J_n \to 0$，而不只是“从草图看来很小”？

我们需要一个确确实实的上界（bound）。在 $[0, \frac{1}{4}\pi]$ 上，$\tan\theta \geq 0$ 且 $\sec^2\theta \geq 1$，所以

$$0 \leq J_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+1}\theta \,\mathrm{d}\theta \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+1}\theta \sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2n+2}.$$

因此当 $n \to \infty$ 时 $J_n \to 0$，这正是 k 很大时的草图所提示的（而且上界 $1/(2n+2)$ 与尖峰面积约为 $1/(2k)$ 相符）。由于 $|J_n|$ 就是公式中括号的绝对值，

$$\left|\tfrac{1}{2}\ln 2 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m}\right| = J_n \leq \frac{1}{2n+2} \to 0,$$

所以部分和（partial sum）$\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m}$ 收敛（converge）至 $-\frac{1}{2}\ln 2$。乘以 -1，得

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m} = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

第二个级数

现在对偶数次幂照样做一遍。设 $K_n = I_{2n}$。在归约公式中取 $k = 2n-2$，得

$$K_n = \frac{1}{2n-1} - K_{n-1} \qquad (n \geq 1), \qquad K_0 = \tfrac{1}{4}\pi.$$

完全相同的归纳法（这次由 $K_1 = 1 - \frac{1}{4}\pi$ 开始）给出

$$K_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}\theta \,\mathrm{d}\theta = (-1)^n\left(\tfrac{1}{4}\pi + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m-1}\right):$$

归纳步骤是 $K_n = \frac{1}{2n-1} - (-1)^{n-1}(\cdots) = (-1)^n(\cdots) + (-1)^n\frac{(-1)^n}{2n-1}$，与之前一样。同样的上界给出

$$0 \leq K_n \leq \int_0^{\pi/4} \tan^{2n}\theta \sec^2\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2n+1} \to 0,$$

所以 $\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m-1} \to -\frac{1}{4}\pi$，即

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2m-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

验算

- 取 $n = 1$：$\int_0^{\pi/4} \tan^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0.15343$，而对该积分使用森逊法则（Simpson's rule）所得的结果，准确至小数点后十位都相同。我们用这个方法验算了 $n = 1, \ldots, 11$ 时 I_{2n+1} 和 I_{2n} 的公式。

- 当 k 很大时，数值计算得 $I_{100} \approx 0.0049995$ 及 $I_{1000} \approx 0.00049999996$，非常接近 $1/(2k)$，与草图的预测一致。
- 两个级数各取一百万项，得 $0.346573\ldots$ 和 $0.785398\ldots$，而 $\frac{1}{2}\ln 2 = 0.346574$，$\frac{1}{4}\pi = 0.785398$。误差大约等于下一项的大小，与上面的上界所提示的一致。

常见错误

- 只说“$\tan^{2n+1}\theta \to 0$，所以积分趋向 0”而不给出上界。被积函数（integrand）在 $\theta = \frac{1}{4}\pi$ 处并不趋向 0，所以必须提出理由，例如利用 $\sec^2\theta \geq 1$ 所得的上界。
- 归纳过程中的正负号错误：把 $(-1)^n$ 留在括号外，并以直接计算核对 $n = 1$ 的情况。

STEP 之外

第一个级数是交错调和级数（alternating harmonic series）$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \ln 2$ 的一半，第二个则是 π 的莱布尼兹（Leibniz）级数。两者都只是条件收敛（conditionally convergent）：重新排列各项可以改变级数的和，这个令人惊讶的事实（黎曼（Riemann）重排定理）在大学第一门分析课程的初段便会遇到。这里的论证，即写出一个精确的误差项再把它夹逼至零，与带余项的泰勒（Taylor）定理是同一个想法。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对两者都有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。