详细解答

STEP II 1991，第 4 题

纯数学 · 余弦之和

> **STEP II 1991，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q4

本题在 *Beyond STEP* 第 6.2 节高斯的正十七边形中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch06/gauss-17gon.html

关键思路

由于 $5\phi = 2\pi$ 及 $17\theta = 2\pi$，角的大倍数的余弦会折回小倍数的余弦：当 $n\phi = 2\pi$ 时，$\cos(n-k)\phi = \cos k\phi$。因此，当我们用积化和差公式（product formulae）把余弦之和平方或相乘时，所有项都会化回同样的几个余弦。在后半部分，我们把八个余弦 $\cos\theta, \ldots, \cos 8\theta$ 分成两组，每组四个，求出它们的和与积，从而得到一个以 z 为根（root）的二次方程（quadratic）。

解答

五边形： $\phi = 2\pi/5$

我们使用积化和差公式 $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$，以及 $\cos^2 A = \frac{1}{2}(1+\cos 2A)$。由于 $5\phi = 2\pi$，

$$\cos 3\phi = \cos(2\pi - 2\phi) = \cos 2\phi, \qquad \cos 4\phi = \cos(2\pi - \phi) = \cos\phi.$$

因此

$$\begin{aligned} y^2 &= \cos^2\phi + 2\cos\phi\cos 2\phi + \cos^2 2\phi \\ &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi) + (\cos 3\phi + \cos\phi) + \tfrac{1}{2}(1+\cos 4\phi) \\ &= \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\phi) + (\cos 2\phi + \cos\phi) + \tfrac{1}{2}(1+\cos\phi) \\ &= 1 + \tfrac{3}{2}(\cos\phi + \cos 2\phi) = 1 + \tfrac{3}{2}y. \end{aligned}$$

两边乘以 2，得 $2y^2 = 3y + 2$，正是所求。

此式可因式分解为 $(2y+1)(y-2) = 0$，所以 $y = -\frac{1}{2}$ 或 $y = 2$。但 $2\phi = \frac{4\pi}{5}$ 介乎 $\frac{\pi}{2}$ 与 π 之间，故 $\cos 2\phi < 0$，而 $\cos\phi \le 1$。于是 $y < 1$，这就排除了 $y = 2$，所以

$$y = \cos\tfrac{2\pi}{5} + \cos\tfrac{4\pi}{5} = -\tfrac{1}{2}.$$

$\theta = 2\pi/17$ 时各余弦之和

设 $\omega = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$。根据棣美弗定理（de Moivre's theorem），$\omega^k = \cos k\theta + \mathrm{i}\sin k\theta$，并且 $\omega^{17} = \cos 2\pi + \mathrm{i}\sin 2\pi = 1$，而 $\omega \ne 1$。把等比级数（geometric series）求和，

$$\sum_{k=0}^{16} \omega^k = \frac{\omega^{17} - 1}{\omega - 1} = 0.$$

取实部（real parts），得 $\displaystyle\sum_{k=0}^{16} \cos k\theta = 0$，正是所求。

z 的值

记 $c_k = \cos k\theta$。由于 $17\theta = 2\pi$，而且余弦是偶函数（even function），

$$c_{17-k} = c_k \quad 及 \quad c_{-k} = c_k,$$

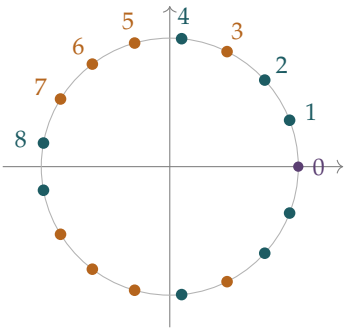
所以每个 c_k 都等于 $c_1, c_2, \ldots, c_8$ 其中之一。特别地，在刚证明的和式中除去 $c_0 = 1$ 后，就得到 $2(c_1 + c_2 + \cdots + c_8) = -1$，所以

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_8 = -\tfrac{1}{2}. \qquad (*)$$

z 中的角是 $1, 2, 4, 8$（每个都是前一个的两倍，并按上述方法化简：$16 \to 1$）。其余四个 $3, 5, 6, 7$ 给出与之配对的和

$$w = c_3 + c_5 + c_6 + c_7.$$

下图显示单位圆（unit circle）上的十七个点 ω^k：蓝绿色的点（及其镜像）对应 z 中的余弦，琥珀色的点则对应 w 中的余弦。



和。 由 $(*)$，$z+w=c_1+c_2+\cdots+c_8=-\frac{1}{2}$。

积。 展开 zw 会得到十六个乘积 c_ac_b，其中 $a\in\{1,2,4,8\}$ 而 $b\in\{3,5,6,7\}$，每个乘积都等于 $\frac{1}{2}(c_{a+b}+c_{a-b})$。把每个下标化到 1 至 8 的范围内（利用 $c_{-k}=c_k$ 及 $c_{17-k}=c_k$），所得的各对下标如下：

	$b=3$	$b=5$	$b=6$	$b=7$
$a=1$	4, 2	6, 4	7, 5	8, 6
$a=2$	5, 1	7, 3	8, 4	8, 5
$a=4$	7, 1	8, 1	7, 2	6, 3
$a=8$	6, 5	4, 3	3, 2	2, 1

（例如 $a=8$、$b=7$ 给出 c_{15} 和 c_1，而 $c_{15}=c_2$。）

想一想 我们需要知道出现的是哪些余弦，还是只需知道各出现多少次？

只需知道次数。计数表中各项，下标 $1,2,\ldots,8$ 在 32 个项目中各自恰好出现四次。所以

$$zw=\tfrac{1}{2}\cdot 4\,(c_1+c_2+\cdots+c_8)=2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)=-1,$$

这里再次用到 $(*)$。

二次方程。 由于 $z+w=-\frac{1}{2}$ 及 $zw=-1$，z 和 w 这两个数是以下方程的根：

$$t^2+\tfrac{1}{2}t-1=0,\qquad \text{即}\qquad 2t^2+t-2=0,$$

所以 $\{z,w\}=\left\{\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4},\ \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}\right\}$。第一个根是正数，第二个是负数。

选取正确的根。 我们证明 $z>0$。由于 $\frac{4}{17}<\frac{1}{4}$，θ 和 2θ 都在 $(0,\frac{\pi}{4})$ 内，所以 c_1 和 c_2 都大于 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，而 $c_1+c_2>\sqrt{2}>1$。此外 $4\theta=\frac{8\pi}{17}<\frac{\pi}{2}$，故 $c_4>0$，而且 $c_8\geq -1$。因此

$$z=(c_1+c_2)+c_4+c_8>1+0-1=0,$$

所以 z 必定是正根：

$$z=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}=-\frac{1-\sqrt{17}}{4}.$$

验算

以数值计算，$\cos 72^\circ+\cos 144^\circ=0.30902-0.80902=-0.5$。取 $\theta=2\pi/17$，用计算机可得 $z=0.932472+0.739009+0.092268-0.982973=0.780776$，而 $(\sqrt{17}-1)/4=0.780776$；另外 $w=-1.280776=(-1-\sqrt{17})/4$，所以 $z+w=-0.5$ 及 $zw=-1$，与所得结果相符。

常见错误

- 在第一部分忘记排除 $y=2$，或在第二部分忘记排除 w 所对应的根：二次方程给出两个可能的答案，必须另外用正负号的论证来选出其中一个。
- 在 $(*)$ 中把 $k=0$ 也算进去：整个和是 0，但 $c_0=1$，所以 $c_1+\cdots+c_{16}=-1$，除以二才得 $-\frac{1}{2}$。
- 在乘积表中化简下标时出错，例如把 c_9 当作新的一项，而不是 c_8。

STEP 之外

这就是高斯（Gauss）的著名计算，它证明了正 17 边形可以用直尺和圆规作出。按 3 的幂（模 17 的一个生成元（generator））把各余弦分成层层嵌套、大小依次为 8、4、2 和 1 的组，就得到一连串二次方程，所以 $\cos\frac{2\pi}{17}$ 可以只用平方根写出；z 和 w 是这一连串方程的第一步，称为高斯周期（Gaussian periods）。完整的故事属于伽罗瓦理论（Galois theory）：参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）；至于单位根（roots of unity）的算术，可参阅 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算术）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。