详细解答

STEP II 1991，第 3 题

纯数学 · 对称联立方程

> **STEP II 1991，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q3

关键思路

三个相等的式子给出两条方程，而未知数有三个，所以不能指望求出 x、y、z 本身。我们能做的，是利用当中的循环对称（cyclic symmetry）。把式子两两相减，每个差 $x-y$ 都会变成下一个差 $y-z$ 的倍数；再把三个关系式相乘，几乎所有东西都会约去。至于第二个结果，把共同值记作 k 并消去分母，便得到三个循环的线性关系式，它们以三种不同方式确定 xyz。

解答

证明 $x^2y^2z^2=1$

令首两个式子相等，得

$$x-y=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{y-z}{yz}.$$

同样地，令第二个与第三个相等，再令第三个与第一个相等，得

$$y-z=\frac{1}{x}-\frac{1}{z}=\frac{z-x}{zx},\qquad z-x=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{x-y}{xy}.$$

把这三条等式相乘，得

$$(x-y)(y-z)(z-x)=\frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{x^2y^2z^2}.$$

由于 x、y 和 z 互不相等（distinct），乘积 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 不为零，所以可以把两边同时除以它。这样便剩下 $1=1/(x^2y^2z^2)$，即

$$x^2y^2z^2=1,$$

这正是所要证明的。

> **想一想** 我们究竟在哪里用到了 x、y、z 互不相等且非零这个条件?

非零是为了令分数 $1/x$、$1/y$、$1/z$ 有意义。互不相等则让我们可以约去 $(x-y)(y-z)(z-x)$。没有这个条件，结果便不成立：$x=y=z=2$ 满足各方程，但 $x^2y^2z^2=64$。

共同值为 ± 1

设 k 为共同值（common value），则

$$x+\frac{1}{y}=k,\qquad y+\frac{1}{z}=k,\qquad z+\frac{1}{x}=k.$$

各式分别乘以 y、z 和 x（全部非零），得

$$xy=ky-1,\qquad yz=kz-1,\qquad zx=kx-1. \tag{$*$}$$

现在把其中第一式乘以 z，并用第二式代换 yz：

$$\begin{aligned} xyz &= k\,yz - z \\ &= k(kz-1)-z \\ &= (k^2-1)z-k. \end{aligned}$$

作代换 $x\to y\to z\to x$ 时，关系式 $(*)$ 保持不变，所以从第二式和第三式出发作同样的计算，可得

$$xyz=(k^2-1)x-k,\qquad xyz=(k^2-1)y-k.$$

把 xyz 的首两个表达式相减，得

$$(k^2-1)(z-x)=0.$$

由于 $z\neq x$，必有 $k^2=1$，所以 $x+\frac{1}{y}$ 的值不是 $+1$ 就是 -1，这正是所要证明的。

额外的收获是：把 $k^2=1$ 代回去，可得 $xyz=-k$。这是得出第一个结果的另一条途径，因为这样便有 $x^2y^2z^2=k^2=1$。

验算

两个值都确实会出现。当 $k=1$ 时，从任意 $x\neq 0,1$ 出发，取 $y=\frac{1}{1-x}$ 及 $z=\frac{1}{1-y}=\frac{x-1}{x}$。于是 $z+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x}=1$，所以三个式子都等于 1。例如 $x=2$ 给出 $y=-1$，$z=\frac{1}{2}$：确实有 $2-1=-1+2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，而且 $xyz=-1=-k$。把 (x,y,z) 换成 $(-x,-y,-z)$，便得到 $k=-1$ 的解，例如 $(-2,1,-\frac{1}{2})$。在这里三个数永远互不相等，因为 $x=\frac{1}{1-x}$ 需要 $x^2-x+1=0$，而这条方程没有实根。我们用精确分数检验了约 4000 组这样的三元组，每次都确认 $x^2y^2z^2=1$ 和 $xyz=-k$。

常见错误

- 除以 $(x-y)(y-z)(z-x)$ 时没有说明它为何不为零。题目给出互不相等的条件，正是为此而设。
- 得出 $xyz = 1$ 而不是 $xyz = \pm 1$ 的结论：事实上 $xyz = -k$，所以当共同值为 1 时，$xyz = -1$。

STEP 之外

映射 $t \mapsto \dfrac{1}{k-t}$ 把 x 变成 y，把 y 变成 z，又把 z 变回 x。它是一个莫比乌斯变换（Möbius transformation），对应的矩阵（matrix）是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$，而这类映射的复合正好对应于它们的矩阵相乘。这道题其实是在问：这个映射何时有长度为 3 的循环（cycle）？答案 $k^2 = 1$ 正好就是该矩阵的立方为单位矩阵（identity）的倍数之时。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）有精彩的一章，讲述莫比乌斯变换，以及如何按矩阵的迹（trace）把它们分类。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。