详细解答

STEP II 1991，第 2 题

纯数学 · 双曲线的渐近线

STEP II 1991，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s2-q2

关键思路

二次部分 $3y^2 - 10xy + 3x^2$ 可因式分解（factorise）为 $(3y - x)(y - 3x)$，而这就是整题的关键：只要把因式分解补全，将一次项也包括在内，曲线便成为“两个一次式之积 $= 1$”。沿曲线走到极远处时，其中一个因式必定趋向无限大，另一个因式便必定趋向零；令后者等于零，所得的直线就是一条渐近线（asymptote）。这正是提示所要求的“s 与 t 在极限时的关系”。

解答

切线

把 (†) 对 x 作隐函数微分（implicit differentiation），

$$6y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 10y - 10x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 6x + 16\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 16 = 0,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{10y - 6x + 16}{6y - 10x + 16} = \frac{5y - 3x + 8}{3y - 5x + 8}.$$

在 (s, t) 处，斜率（gradient）为 $m = \dfrac{5t - 3s + 8}{3t - 5s + 8}$，而切线（tangent）为 $y = mx + (t - ms)$。把截距（intercept）通分，

$$t - ms = \frac{t(3t - 5s + 8) - s(5t - 3s + 8)}{3t - 5s + 8} = \frac{3t^2 - 10st + 3s^2 + 8t - 8s}{3t - 5s + 8}.$$

由于 (s,t) 在曲线上，$3t^2-10st+3s^2=-16t+16s-15$，所以分子为 $-8t+8s-15=-(8t-8s+15)$。因此切线为

$$y=\left(\frac{5t-3s+8}{3t-5s+8}\right)x-\left(\frac{8t-8s+15}{3t-5s+8}\right),$$

正如所求。（当 $3t-5s+8=0$ 时，切线是铅垂的，此时应把公式理解为去分母后的形式。）

渐近线

尝试把 (†) 写成 $(3y-x+a)(y-3x+b)+k=0$。展开得

$$(3y-x+a)(y-3x+b)=3y^2-10xy+3x^2+(3b+a)y-(b+3a)x+ab,$$

所以我们需要 $3b+a=16$ 及 $b+3a=16$，由此得 $a=b=4$ 及 $ab=16$。因此 (†) 即是

$$(3y-x+4)(y-3x+4)=1.$$

对于点 (s,t)，设

$$u=3t-s+4,\qquad v=t-3s+4,\qquad \text{于是}\qquad uv=1.$$

切线方程中的每一个式子，都是 u、v 与常数的组合。比较 t 和 s 的系数，得

$$\begin{aligned}5t-3s+8&=\tfrac{1}{2}(3u+v),\\3t-5s+8&=\tfrac{1}{2}(u+3v),\\8t-8s+15&=2(u+v)-1=2(u+v)-uv,\end{aligned}$$

其中最后一式用了 $uv=1$。所以切线的斜率和截距为

$$m=\frac{3u+v}{u+3v},\qquad c=\frac{8t-8s+15}{3t-5s+8}=\frac{2(2u+2v-uv)}{u+3v}.$$

想一想 当 $s\to\infty$ 时，u 和 v 会怎样?

消去 t，得 $u-3v=8s-8$，所以 $u-3v\to\infty$。由于 $uv=1>0$，u 和 v 同号。

- 若两者皆为正数，$u-3v\to\infty$ 迫使 $u\to\infty$，于是 $v=1/u\to 0$。
- 若两者皆为负数，$u-3v=3|v|-|u|\to\infty$ 迫使 $|v|\to\infty$，于是 $u=1/v\to 0$。

这就是提示所要的关系：在其中一支上 $t-3s+4\to 0$，在另一支上 $3t-s+4\to 0$。

情况 $v\to 0$，$u\to\infty$。把分子和分母同除以 u，

$$m=\frac{3+v/u}{1+3v/u}\to 3,\qquad c=\frac{2(2+2v/u-v)}{1+3v/u}\to 4,$$

所以切线的极限位置是 $y = 3x - 4$。

情况 $u \to 0$，$v \to \infty$。把分子和分母同除以 v，

$$m = \frac{3u/v + 1}{u/v + 3} \to \tfrac{1}{3}, \qquad c = \frac{2(2u/v + 2 - u)}{u/v + 3} \to \tfrac{4}{3},$$

所以切线的极限位置是 $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$，即 $3y = x - 4$。

因此两条渐近线是 $y = 3x - 4$ 和 $3y = x - 4$。（若改为令 $s \to -\infty$，所得的仍是这两条直线，只是两个情况的角色互换。）留意这两条正是直线 $v = 0$ 和 $u = 0$：从因式分解后的形式一眼便可看出。

夹角与轴

直线 $y = 3x - 4$ 的斜率为 3，所以它与 x 轴的夹角 θ 满足 $\tan\theta = 3$。它与 y 轴的夹角便是 $\frac{\pi}{2} - \theta$，而 $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta = \frac{1}{3}$。直线 $3y = x - 4$ 的斜率为 $\frac{1}{3}$，所以它与 x 轴的夹角是 $\arctan\frac{1}{3}$，与第一条渐近线和 y 轴的夹角相同。

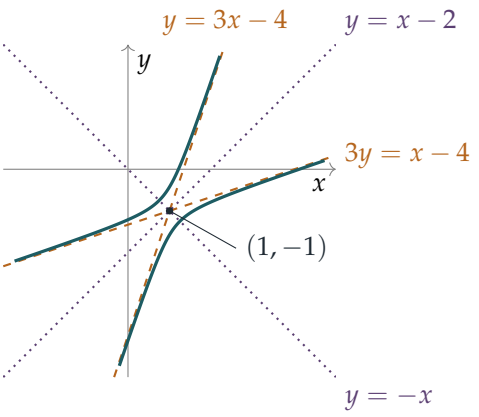
想一想 为甚么由此可知角平分线是甚么?

对直线 $y = x$ 作反射（reflection），会把 x 轴和 y 轴互换；而根据刚才所证，它也会把两条渐近线的方向互换：方向 $(1,3)$ 变成 $(3,1)$。因此两条渐近线之间的夹角关于 $y = x$ 的方向对称，亦即被这个方向平分：两条渐近线的方向与 x 轴分别成 $\arctan 3$ 和 $\arctan\frac{1}{3}$，而这两个角就是 $\frac{\pi}{4} \pm \left(\arctan 3 - \frac{\pi}{4}\right)$。另一条角平分线（bisector）与第一条互相垂直。所以两条角平分线的斜率是 1 和 -1。

双曲线（hyperbola）的轴，就是通过其中心的两条渐近线夹角平分线，而中心是两条渐近线的交点。解 $y = 3x - 4$ 和 $3y = x - 4$：$9x - 12 = x - 4$，所以 $x = 1$，$y = -1$。中心是 $(1,-1)$，而两条轴是

$$y + 1 = x - 1 \iff y = x - 2, \qquad y + 1 = -(x - 1) \iff y = -x.$$

要分辨哪条是哪条：在 $y = -x$ 上有 $u = v = 4 - 4x$，所以由 $uv = 1$ 得 $x = 1 \pm \frac{1}{4}$，顶点（vertices）是 $(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4})$ 和 $(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4})$。所以 $y = -x$ 是贯轴（transverse axis）。在 $y = x - 2$ 上有 $u = 2x - 2 = -v$，所以 $uv = -(2x - 2)^2 \le 0$，这条直线（即共轭轴（conjugate axis））永不与曲线相交。



验算

- 点 $(\frac{5}{4}, -\frac{5}{4})$ 满足 (†)：$3 \cdot \frac{25}{16} + 10 \cdot \frac{25}{16} + 3 \cdot \frac{25}{16} - 20 - 20 + 15 = 25 - 25 = 0$。
- 以数值检验：取 $u = 10^8$（即 $s \approx 1.25 \times 10^7$），切线公式给出斜率 3.0000000 和截距项 3.99999998；取 $u = -10^{-8}$ 则给出 0.33333333 和 1.33333334。
- 中心 $(1, -1)$ 给出 $u = v = 0$，所以它不在曲线上，这就是切线公式永不出现 $0/0$ 的原因。

常见错误

- 只从 $3k^2 - 10k + 3 = 0$（设 $t \approx ks$）求出斜率 3 和 $\frac{1}{3}$，却忘记截距需要用到下一项：$t = 3s - 4 + o(1)$，而不仅是 $t \approx 3s$。
- 把角平分线取为通过原点，而不是通过中心 $(1, -1)$。

STEP 之外

每一条圆锥曲线（conic）$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ 都可写成 $\mathbf{x}^{\mathsf{T}} A \mathbf{x} + \ldots$，其中 $A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$ 是对称矩阵（symmetric matrix），而曲线的轴沿着 A 的特征向量（eigenvectors）的方向。这里 $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征向量是 $(1, 1)$ 和 $(1, -1)$，对应的特征值（eigenvalues）-2 和 8 正负相反，曲线因而是双曲线。像这样把二次型（quadratic forms）对角化（diagonalising），是大学一年级线性代数（linear algebra）的核心课题；参看 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。