详细解答

STEP II 1991，第 16 题

概率与统计 · 二项分布的正态近似

> **STEP II 1991，第 16 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q16

关键思路

追踪水位差额（deficit）：即水位低于坝顶多少。排水令差额稳定上升，而每场骤雨则令它恰好下降 V；溢流就是差额变为负数。在两天假期的问题中，只有一种降雨情况有可能引致溢流，而且届时只有一个均匀分布的时刻起作用。到了暑假，排水已经关掉，于是一切归结为数算骤雨的次数，而这个次数服从二项分布（binomial distribution）。

解答

第 (i) 部分：两天假期

以日为单位，由假期开始的午夜起计算时间，并设 $D(t)$ 为时刻 t 的差额，故 $D(0) = V$。在两场骤雨之间，D 以速率 u 上升，而每场骤雨令它下降 V。只要 D 一旦变为负数，水坝便会溢流。（我们按题目的原意假设，水库存水充足，排水在这两天内可以一直持续。）

设 R_1、R_2 分别为第 1 天和第 2 天下雨的事件，并设下雨的时刻（以一天的分数表示）为 T_1 和 T_2，两者各自在 $[0,1]$ 上服从均匀分布（uniform distribution）。各天互相独立（independent），这一点已隐含在“任何一天下雨的概率为 p”这句话之中。

- **没有下雨：**差额只会增加；不会溢流。
- **只有一天下雨**，时刻为 s：骤雨刚过后 $D = V + us - V = us \geq 0$，所以不会溢流（概率为零的事件 $s = 0$ 除外）。
- **两天都下雨：**第一场骤雨过后 $D = uT_1 \geq 0$，这是安全的。第二场骤雨刚过后，即在时刻 $1 + T_2$，

$$D = V + u(1 + T_2) - 2V = u(1 + T_2) - V.$$

留意 T_1 已经消失：无论第一场骤雨何时落下，排水的速率都一样。

所以，溢流恰好在两天都下雨而且 $u(1+T_2) < V$ 时发生，即 $T_2 < \frac{V}{u} - 1$。若 $\frac{1}{2}V \le u \le V$，则 $\frac{V}{u} - 1$ 这个数位于 $[0,1]$ 之内，而由于 T_2 服从均匀分布，

$$\mathrm{P}(\text{溢流}) = p^2\left(\frac{V}{u} - 1\right).$$

令上式等于 Q：

$$\frac{V}{u} = 1 + \frac{Q}{p^2} \quad\Longrightarrow\quad u = \frac{p^2 V}{p^2 + Q}.$$

条件 $Q < p^2$ 正是令这个结果前后一致的原因：由 $0 < Q/p^2 < 1$ 可得 $\frac{1}{2}V < u < V$，与假设相符。（没有这个条件便无解。溢流的概率永远不会超过 p^2，因为必须两天都下雨。）

第 (i) 部分：暑假

现在 $u = 0$，所以差额永不增加。它由 kV 开始，每场骤雨令它下降 V，因此若 N 为 18 天之中下雨的日数，则

$$\text{溢流} \iff NV > kV \iff N > k.$$

各天互相独立，每天下雨的概率为 $\frac{1}{3}$，所以 $N \sim \mathrm{B}(18, \frac{1}{3})$，其平均值为 6，方差（variance）为 $18 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 4$。

> **想一想** 这里哪一种近似才算“合适”？为甚么需要连续性修正（continuity correction）？

由于 $np = 6$ 而 $n(1-p) = 12$，正态近似（normal approximation）$N \approx \mathrm{N}(6,4)$ 是合理的。（泊松近似（Poisson approximation）则不合适，因为 p 并不小。）N 只取整数值，所以对整数 k 而言，事件 $N > k$ 就是事件 $N \ge k+1$，我们以 $X > k + \frac{1}{2}$ 来近似它，其中 $X \sim \mathrm{N}(6,4)$。我们需要

$$\mathrm{P}\left(Z > \frac{k + \frac{1}{2} - 6}{2}\right) < \frac{1}{10} \iff \frac{k - 5.5}{2} > 1.2816 \iff k > 8.06.$$

具体来说，$k = 8$ 给出 $\mathrm{P}(Z > 1.25) \approx 0.106$，太大了；而 $k = 9$ 给出 $\mathrm{P}(Z > 1.75) \approx 0.040$，符合要求。由于溢流与否只取决于 $N > k$ 是否成立，介乎 8 与 9 之间的非整数 k 并不比 $k = 9$ 好。所以工程师应把水库排水至

$$k = 9,$$

即低于坝顶 $9V$。

第 (ii) 部分

现在共有 36 个半天，互相独立，每个半天下雨的概率为 $\frac{1}{6}$。排水量仍然是零，所以溢流同样表示 $N > k$，只是现在 $N \sim \mathrm{B}(36, \frac{1}{6})$。平均值仍然是 6，但方差是 $36 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 5$，比 4 大。

平均值相同时，方差较大即表示上尾较重：对每个高于平均值的 k，$\mathrm{P}(N > k)$ 都比之前大。所以所需的 k 较高。以 $\mathrm{N}(6, 5)$ 连同连续性修正作近似，我们需要

$$\frac{k - 5.5}{\sqrt{5}} > 1.2816 \iff k > 8.37,$$

而之前则是 $k > 8.06$。（这里正态近似给出 $\mathrm{P}(N \geq 9) \approx 0.132$，而第 (i) 部分则是 0.106。）所以门槛上升了。若把 k 向上舍入至整数，两种情况仍然都得出 $k = 9$。不过在 $k = 9$ 时，尾部概率现在约为 0.06 而不是 0.04，所以安全余裕较小。

验算

- 以蒙地卡罗模拟（Monte Carlo simulation）模拟两天假期（400,000 次），取 $p = 0.5$、$Q = 0.1$ 及 $u = \frac{0.25}{0.35}V \approx 0.714V$，得出的溢流频率为 0.0996。$p$ 和 Q 取其他数值时，结果同样吻合。
- 极限情况：当 $Q \to p^2$ 时，$u \to \frac{1}{2}V$，这是两天下雨仍可引致溢流的最慢排水速率。当 $Q \to 0$ 时，$u \to V$，在这个速率下，第二场骤雨永远不会造成溢流。
- 精确的二项分布尾部概率印证了正态近似。对 $\mathrm{B}(18, \frac{1}{3})$，$\mathrm{P}(N \geq 9) = 0.1076$ 及 $\mathrm{P}(N \geq 10) = 0.0433$。对 $\mathrm{B}(36, \frac{1}{6})$，$\mathrm{P}(N \geq 9) = 0.1332$ 及 $\mathrm{P}(N \geq 10) = 0.0652$。

常见错误

- 以为在两天假期的问题中，第一场雨的时刻 T_1 有影响。其实它会互相抵消，因为排水速率是恒定的。
- 忘记连续性修正。没有它，不等式便变成 $k > 8.56$，掩盖了 N 是整数这个事实。
- 因为平均值相等，便说 (ii) 的答案“一样”。其实控制尾部的是分布的离散程度。

STEP 之外

雨水在随机的时刻到来，而水则以稳定的速率排走，这是应用概率中的一个经典模型：储存理论（storage theory），由 Moran 为研究水坝而发展出来。它与排队（queues）和保险破产（insurance ruin）问题关系密切。在第 (ii) 部分，若把一天分割成愈来愈多、愈

来愈小的时段，同时保持平均值不变，则 $\mathrm{B}(n, 6/n)$ 趋向平均值为 6、方差为 6 的泊松分布（Poisson distribution），而雨水的到来则成为一个泊松过程（Poisson process）。想进一步了解，可参阅 Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。