详细解答

STEP II 1991，第 14 题

力学 · 相对速度与追踪

STEP II 1991，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

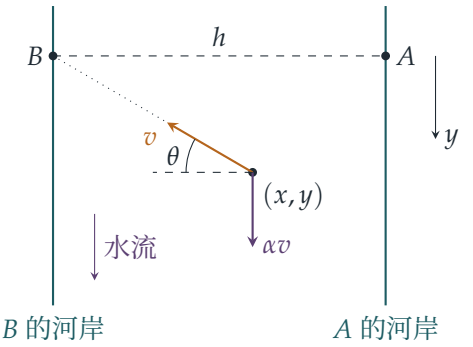
step.maths.org/questions/91-s2-q14

关键思路

船相对于地面的速度，等于船相对于水的速度加上水流的速度。“船头始终指向 B”是一个几何条件，即 $y = x\tan\theta$；对它求导，便得到同一个速度的第二个表达式。把两个表达式对照，就得出一条连系 x 与 θ 的可分离变量（separable）方程。选用代换 $\tan\theta = \sinh(\alpha s)$，是因为它令 $\sec\theta + \tan\theta$ 变成一个指数函数，于是所有式子都化为 s 的简单指数函数。

解答

我们把船当作质点（particle）来建立模型。取 B 为原点，x 由 B 所在的河岸量向 A，y 则沿下游方向量度，因此 A 位于 $(h,0)$，而船由该处出发。



以 θ 表示速度

船头指向 B 所在的河岸，与方向 AB 成 θ 角，并偏向上游（以抵消水流造成的漂移）。因此，以我们的 (x,y) 分量表示，船相对于水的速度（relative velocity）是沿单位向量

$-(\cos\theta, \sin\theta)$ 的 v。再加上水流，即 y 方向上的 αv，便得

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-v\cos\theta\\ \alpha v - v\sin\theta\end{pmatrix}.$$

指向 B

由位于 (x, y) 的船到 B 的方向是沿 $(-x, -y)$，而这个方向与 AB 成 θ 角，当且仅当 $\tan\theta = y/x$。所以在整个运动过程中，

$$y = x\tan\theta.$$

利用积法则（product rule）和链式法则（chain rule）对 t 求导，

$$\dot{y} = \tan\theta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x\sec^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t},$$

所以速度向量 $(\dot{x}, \dot{y})$ 具有题目要求的形式。

x 与 θ 的微分方程

现在把两个表达式对照。由 x 分量得 $\dot{x} = -v\cos\theta$。把它代入 y 分量，

$$\begin{aligned}\tan\theta\,(-v\cos\theta) + x\sec^2\theta\,\dot{\theta} &= \alpha v - v\sin\theta\\ x\sec^2\theta\,\dot{\theta} &= \alpha v, \qquad (*)\end{aligned}$$

这是因为 $\tan\theta\cos\theta = \sin\theta$，两边的 $-v\sin\theta$ 项互相抵消。特别地，$\dot{\theta} > 0$，所以 θ 由 0 起不断增加，我们可以把 x 看成 θ 的函数。两式相除，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\dot{x}}{\dot{\theta}} = \frac{-v\cos\theta\cdot x\sec^2\theta}{\alpha v} = -\frac{x\sec\theta}{\alpha}, \qquad \text{所以} \qquad \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = -x\sec\theta,$$

正是所求。

求解 x

这条方程可以分离变量（船到达之前 $x > 0$）：

$$\alpha\int\frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta \quad\Longrightarrow\quad \alpha\ln x = -\ln(\sec\theta + \tan\theta) + C,$$

这里用了标准积分 $\int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$，它在 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时成立。开始时船在 A，该处 $x = h$ 而 $\theta = 0$，所以 $C = \alpha\ln h$。因此

$$\alpha\ln\frac{x}{h} = -\ln(\sec\theta + \tan\theta), \qquad \text{即} \qquad \left(\frac{x}{h}\right)^{\alpha} = (\sec\theta + \tan\theta)^{-1}.$$

代换 $\tan\theta = \sinh(\alpha s)$

> **想一想** 以 s 表示，$\sec\theta$ 是甚么?

由于 $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta = 1+\sinh^2(\alpha s) = \cosh^2(\alpha s)$，而 $\sec\theta$ 和 $\cosh(\alpha s)$ 都是正数（因为 $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$），我们得到 $\sec\theta = \cosh(\alpha s)$。于是

$$\sec\theta + \tan\theta = \cosh(\alpha s) + \sinh(\alpha s) = \mathrm{e}^{\alpha s},$$

所以 $(x/h)^\alpha = \mathrm{e}^{-\alpha s}$，两边取 α 次方根，得 $x = h\mathrm{e}^{-s}$。

至于变率的方程，把 $\tan\theta = \sinh(\alpha s)$ 对 t 求导:

$$\sec^2\theta\,\dot\theta = \alpha\cosh(\alpha s)\,\dot s.$$

把这个结果和 $x = h\mathrm{e}^{-s}$ 代入 $(*)$，得 $h\mathrm{e}^{-s}\cdot\alpha\cosh(\alpha s)\,\dot s = \alpha v$，再除以 α，

$$h\mathrm{e}^{-s}\cosh(\alpha s)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v,$$

正是所求。

渡河所需的时间

在 A 处，$\theta = 0$，所以 $s = 0$。由于 $\dot s > 0$，s 不断增加，而当 $x = h\mathrm{e}^{-s} \to 0$，即 $s \to \infty$ 时，船到达 B。（船确实会到达 B：因为 $\alpha < 1$，所以 $y = x\tan\theta = h\mathrm{e}^{-s}\sinh(\alpha s) \to 0$。）分离变量后，渡河时间为

$$\begin{aligned} T &= \frac{h}{v}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s}\cosh(\alpha s)\,\mathrm{d}s = \frac{h}{2v}\int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-(1-\alpha)s} + \mathrm{e}^{-(1+\alpha)s}\right)\mathrm{d}s \\ &= \frac{h}{2v}\left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1+\alpha}\right) = \frac{h}{2v}\cdot\frac{2}{1-\alpha^2} = \frac{h}{v(1-\alpha^2)}, \end{aligned}$$

其中两个积分都收敛(converge),因为 $1-\alpha > 0$。所以渡河所需的时间是 $hv^{-1}(1-\alpha^2)^{-1}$。

验算

- 没有水流时（$\alpha = 0$），船笔直驶过对岸，$T = h/v$，与预期相符。当 $\alpha \to 1$ 时，所需时间趋向无限大：船若不比水流快，在 B 附近船头正对上游时，便永远无法逆流前进。
- 我们以数值方法逐步计算这个运动（四阶龙格－库塔法（Runge–Kutta），每一步都把船头对准 B）。取 $h = v = 1$ 和 $\alpha = \frac{1}{2}$，船在 $t \approx 1.33333$ 时到达，与 $1/(1-\frac{1}{4}) = \frac{4}{3}$ 吻合。沿着整条路径，$(x/h)^\alpha(\sec\theta+\tan\theta)$ 一直等于 1，误差约为 10^{-13}。

常见错误

- 弄错船头方向的 y 分量的正负号。船会被冲向下游，所以指向 B 就是要部分指向上游；当 $\theta > 0$ 时，这个分量是 $-v\sin\theta$。
- 忘记说明为何 $\sec\theta = +\cosh(\alpha s)$：这需要 θ 一直小于 $\frac{\pi}{2}$，而这是成立的，因为 θ 是由 B 到一个 $x > 0$ 的点的直线所成的角。

STEP 之外

这是一道经典的追逐曲线（pursuit curve）问题：一个物体不断把方向对准目标，而它的路径可由一条关于运动方向的微分方程求得。同样的想法可以描述狗追赶正在走动的主人，或者导弹追踪目标，并且自然地引出曳物线（tractrix）一类的曲线。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）很适合用来熟习相对速度，以及在运动参考系（moving frames）中建立运动方程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。