详细解答

STEP II 1991，第 13 题

力学 · 刚体转动

STEP II 1991，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s2-q13

关键思路

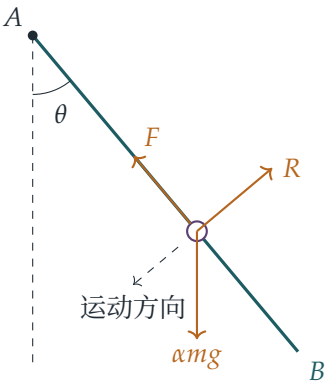
在小环滑动之前，杆和小环如同单一刚体（rigid body）一起绕 A 转动。因此我们可以求出这个组合体的角速率（angular speed，由能量求得）和角加速度（angular acceleration，由力矩（moments）求得），然后用它们算出杆必须对小环施加甚么力，才能令小环继续随杆运动。只有当小环所需的摩擦力（friction）不超过法向反作用力（normal reaction）的 μ 倍时，小环才会留在原位；这个条件首次不成立的角度，就是开始滑动的角度。

解答

模型

我们把小环视为与 A 相距 x 的质点，把支点视为光滑，并把杆视为刚体。设 θ 为杆与向下铅垂线之间的夹角，所以释放时 $\theta = \frac{\pi}{2}$，而杆向下摆动时 θ 递减。以 $\omega = |\dot{\theta}|$ 表示角速率，以 $\beta = |\ddot{\theta}|$ 表示角加速度的大小。

杆对小环施加两个力：一个是垂直于杆的法向反作用力 R，以小环运动的方向为正；另一个是沿杆的摩擦力 F，以指向 A 的方向为正。由于小环是套在杆上的，R 的正负号两种情况都有可能出现。



图中把 R 画成与运动方向相反，因为当 $k^2 > xd$ 时结果正是如此，但在代数运算中我们保留一般的正负号。

刚体的运动

小环固定在杆上时，整体绕 A 的转动惯量（moment of inertia）为 $mk^2 + \alpha m x^2 = m(k^2 + \alpha x^2)$。自释放起，杆的质心（centre of mass）下降了 $d\cos\theta$，小环下降了 $x\cos\theta$，所以由能量守恒（conservation of energy）可得

$$\tfrac{1}{2}m(k^2 + \alpha x^2)\,\omega^2 = mg(d + \alpha x)\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \omega^2 = \frac{2g(d + \alpha x)\cos\theta}{k^2 + \alpha x^2}.$$

对 A 取力矩（支点的力没有力矩），两个重量的总力矩为 $mg(d + \alpha x)\sin\theta$，所以

$$\beta = \frac{g(d + \alpha x)\sin\theta}{k^2 + \alpha x^2}.$$

小环所受的力

小环沿半径为 x 的圆运动。它的加速度有两个分量：沿杆指向 A 的 $x\omega^2$，以及垂直于杆、沿运动方向的 $x\beta$。沿杆向外的方向与向下铅垂线的夹角为 θ，所以重量沿杆向外的分量为 $\alpha mg\cos\theta$，沿运动方向的分量为 $\alpha mg\sin\theta$。

沿杆、指向 A 的方向：$F - \alpha mg\cos\theta = \alpha m x\omega^2$，所以

$$\begin{aligned} F &= \alpha mg\cos\theta\left(1 + \frac{2x(d + \alpha x)}{k^2 + \alpha x^2}\right) \\ &= \frac{\alpha mg\cos\theta\,(k^2 + 3\alpha x^2 + 2xd)}{k^2 + \alpha x^2}. \end{aligned}$$

垂直于杆、沿运动方向：

$$R + \alpha mg\sin\theta = \alpha m x\beta \quad\Longrightarrow\quad R = \alpha mg\sin\theta\left(\frac{x(d + \alpha x)}{k^2 + \alpha x^2} - 1\right) = \frac{\alpha mg\sin\theta\,(xd - k^2)}{k^2 + \alpha x^2}.$$

留意 αx^2 的项在 R 中互相抵消，这就是为甚么只出现 $k^2 - xd$。

想一想 小环倾向朝哪个方向滑动？R 的正负号又代表甚么？

当 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时，我们有 $F > 0$：杆必须把小环拉向 A，所以若摩擦力不足，小环便会向外滑，即滑向 B。若 $k^2 > xd$，则 $R < 0$，即杆正在拖住小环。若只有小环自己，它会比杆上这一点下落得更快，所以杆要顶住它。

何时开始滑动?

只要 $|F| \le \mu|R|$，小环便会固定在杆上。当 $k^2 > xd$ 时，F 和 $|R|$ 都含有同一个正因子 $\alpha mg/(k^2 + \alpha x^2)$，所以条件是

$$\cos\theta\,(k^2 + 3\alpha x^2 + 2xd) \le \mu \sin\theta\,(k^2 - xd), \quad \text{即} \quad \mu\tan\theta \ge \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{k^2 - xd}.$$

释放时，$\theta = \frac{\pi}{2}$ 而 $F = 0$，所以小环不会立即滑动。当 θ 由 $\frac{\pi}{2}$ 递减至 0 时，$\mu\tan\theta$ 由 $+\infty$ 平稳地递减至 0，而右边是一个固定的正数。所以不等式首次不成立、小环开始向外滑动的时刻，就是在满足下式的唯一角度：

$$\boxed{\mu\tan\theta = \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{k^2 - xd}}$$

这正是所要求的结果。小环必定在杆到达铅垂位置之前滑动。

第 (i) 部分：$k^2 = xd$

现在在任何角度都有 $R = 0$，所以可提供的最大摩擦力 $\mu|R|$ 为零。但只要 $\theta < \frac{\pi}{2}$，便有 $F > 0$。所以不论 μ 的值是多少，杆一释放，小环便开始沿杆向外滑动。从物理上看，释放时杆上与 A 相距 $x = k^2/d$ 的那一点，开始下落时的加速度恰好是 g（因为在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时 $x\beta = g$）。所以小环对杆的两侧都没有压力，摩擦力也就无从产生。

第 (ii) 部分：$k^2 < xd$

现在 $R > 0$：杆沿运动方向推动小环，因为杆上这一点在释放时下落的加速度会大于 g。小环同样倾向向外滑动，而条件 $F \le \mu R$ 变成

$$\mu\tan\theta \ge \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{xd - k^2}.$$

按照与之前相同的论证，小环起初保持不动，并在以下情况开始向外滑动：

$$\mu\tan\theta = \frac{3\alpha x^2 + k^2 + 2xd}{xd - k^2},$$

这就是把题目所给结果中的 $k^2 - xd$ 换成 $|k^2 - xd|$。唯一的分别是法向反作用力现在作用在小环的另一侧。

验算

- 当 $k^2 > xd$ 时，随着 $\mu \to \infty$，滑动角度 $\theta \to 0$：非常粗糙的杆几乎可以把小环一直留住到最低点。当 $k^2 - xd \to 0$ 时，该角度趋向 $\frac{\pi}{2}$，与第 (i) 部分吻合。
- 长度为 $2a$ 的均匀杆有 $d = a$ 及 $k^2 = \frac{4}{3}a^2$，所以临界位置 $x = k^2/d = \frac{4}{3}a$ 就是撞击中心（centre of percussion），即杆释放时以自由落体方式开始运动的那一点。
- 在数值方面，我们对刚体运动进行积分，用有限差分算出小环的加速度，并就随机选取的参数值重新求得 F 和 R，误差在 10^{-5} 之内。例如，当 $k^2 - xd \approx 2.87$ 时，小环首次需要多于 $\mu|R|$ 的摩擦力是在 $\theta \approx 1.3270$，与公式一致。$k^2 < xd$ 的情况亦以同样方式与 (ii) 的公式吻合。

常见错误

- 忘记小环本身对转动惯量和对重量力矩的贡献。在滑动之前，小环是刚体的一部分。
- 使用摩擦定律时，以重量的法向分量代替实际的法向反作用力 R，而这里的法向反作用力还取决于角加速度。
- 在沿杆方向的方程中漏掉向心（centripetal）项 $x\omega^2$，而 $3\alpha x^2$ 中的因子 3 正是由此而来。

STEP 之外

与支点相距 k^2/d 的那一点就是撞击中心。在该处击打，支点不会产生冲击反作用力，这就是板球棒或网球拍有“甜点”的原因。它同时也是与该复摆（compound pendulum）周期相同的单摆的长度。这里所用的方法，是先求出刚体的运动，再问需要甚么内力来维持这种运动，这正是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）中分析约束力（constraint forces）的基础。想进一步了解刚体转动和复摆，可阅读 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。