详细解答

STEP II 1991，第 12 题

力学 · 受迫弹性振动

> **STEP II 1991，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q12

本题在 *Beyond STEP* 第 11.1 节共振中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/resonance.html

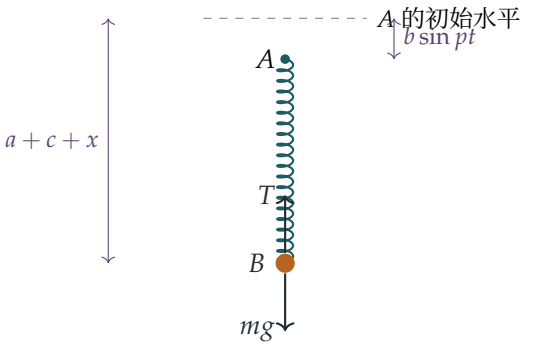
关键思路

张力只取决于伸长量（extension），即质点的位置减去移动端的位置，再减去自然长度（natural length）。把它用 x 和 $b\sin pt$ 表示出来，再利用初始平衡状态把弹性模量（modulus）换成含 c 的式子，运动方程（equation of motion）便自然得出。接下来要处理的是一个受迫简谐振子（forced simple harmonic oscillator）。求解时把特解（particular solution）加到余函数（complementary function）上，并谨记“拉紧”的意思是“伸长量永不为负”。

解答

运动方程

把质点视为质量为 m 的一点，系于一条遵从胡克定律（Hooke's law）、弹性模量为 λ 的轻弹性绳上。所有位置均由 A 的初始位置起向下量度。



在初始平衡状态下，伸长量为 c，而张力与重量平衡：

$$\frac{\lambda c}{a} = mg, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\lambda}{ma} = \frac{g}{c} = n^2.$$

在时间 t，质点位于深度 $a + c + x$，而端点 A 位于深度 $b \sin pt$。只要绳子拉紧，其长度为 $a + c + x - b \sin pt$，所以伸长量为

$$e = c + x - b \sin pt,$$

而张力为 $T = \lambda e / a$。对质点沿向下方向分解力，

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= mg - \frac{\lambda}{a}(c + x - b \sin pt) \\ &= mg - \frac{\lambda c}{a} - \frac{\lambda}{a}(x - b \sin pt) \\ &= -\frac{\lambda}{a}(x - b \sin pt), \end{aligned}$$

其中用了 $\lambda c / a = mg$。两边除以 m，并利用 $\lambda/(ma) = n^2$，得

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -n^2(x - b \sin pt),$$

正是所求。这里需要 $e \geq 0$：假如绳子松弛，张力便会是零，而不是 $\lambda e / a$。

求解 $x(t)$

把方程改写成 $\ddot{x} + n^2 x = n^2 b \sin pt$。余函数是 $C \cos nt + D \sin nt$。至于特积分（particular integral），试用 $x = K \sin pt$：

$$-p^2 K + n^2 K = n^2 b \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{n^2 b}{n^2 - p^2},$$

这是成立的，因为 $p < n$ 保证 $n^2 - p^2 \neq 0$。所以

$$x = \frac{n^2 b}{n^2 - p^2} \sin pt + C \cos nt + D \sin nt.$$

在 $t = 0$ 时，质点位于平衡位置且处于静止，所以 $x(0) = 0$ 及 $\dot{x}(0) = 0$。由前者得 $C = 0$。由后者得

$$\frac{n^2 bp}{n^2 - p^2} + nD = 0 \quad \Longrightarrow \quad D = -\frac{nbp}{n^2 - p^2}.$$

因此

$$x(t) = \frac{bn}{n^2 - p^2}(n \sin pt - p \sin nt),$$

正是所求。

绳子何时保持拉紧

想一想 究竟是甚么必须保持为正：是 x、张力，还是别的东西?

是伸长量 $e = c + x - b \sin pt$。$x(t)$ 的公式只在 $e \geq 0$ 时才描述这个运动，所以绳子自始至终保持拉紧，当且仅当这个不等式对所有 $t \geq 0$ 都成立。代入 x，

$$\begin{aligned} x - b \sin pt &= b \sin pt \left(\frac{n^2}{n^2 - p^2} - 1 \right) - \frac{bnp}{n^2 - p^2} \sin nt \\ &= \frac{bp}{n^2 - p^2}(p \sin pt - n \sin nt). \end{aligned}$$

所以充分必要条件（necessary and sufficient condition）是

$$c + \frac{bp}{n^2 - p^2}(p \sin pt - n \sin nt) \geq 0 \quad \text{对所有} t \geq 0,$$

又因为 $n^2 - p^2 > 0$，这等价于

$$bp(n \sin nt - p \sin pt) \leq c(n^2 - p^2) \quad \text{对所有} t \geq 0.$$

（如果 e 只在个别孤立的时刻触及 0，张力在那一瞬间为零，但运动方程仍然成立，绳子亦从未真正松弛。这就是不等式不必严格的原因。）

现在假设 $pb < (n - p)c$。对任何 t，由于 $\sin nt \leq 1$ 和 $-\sin pt \leq 1$，且 $n, p > 0$，

$$n \sin nt - p \sin pt \leq n + p.$$

取 $b > 0$（即振幅），便有 $bp > 0$，所以

$$bp(n \sin nt - p \sin pt) \leq bp(n + p) < (n - p)c(n + p) = c(n^2 - p^2).$$

条件成立，而且其实是严格不等式，所以绳子自始至终保持拉紧。（假如容许 b 为负，只要以 $|b|$ 代替 b，同样的论证仍然适用，因为 $|n \sin nt - p \sin pt| \leq n + p$。）

验算

- 取 $t=0$：$x(0)=0$ 及 $\dot{x}(0)=\frac{bn}{n^2-p^2}(np-pn)=0$，与应有的结果相符。
- 当 $p\to 0$ 时，端点 A 几乎不动，而 $x(t)\approx\frac{bn}{n^2}(npt-pnt)\to 0$。一如所料，甚么也没有发生。
- 最小伸长量不可能低于 $c-bp(n+p)/(n^2-p^2)=c-bp/(n-p)$，而此值为正，恰好当 $pb<(n-p)c$。
- 数值上，以随机选取的 m,λ,a,c,b,p 对完整的胡克定律方程作逐步（RK4）积分，结果与 $x(t)$ 的公式相符，误差在 4×10^{-10} 之内。取 $n=1$、$p=1/\sqrt{2}$、$c=1$，而 b 只比 $(n-p)c/p$ 高出 5%，则到 $t=20\,000$ 之前，伸长量确实会变成负数（约为 -0.05）。

常见错误

- 把 x 本身当作伸长量。上端是会移动的，所以伸长量是 $c+x-b\sin pt$。
- 忘记了 $\dot{x}(0)=0$ 会令解中必须出现 $\sin nt$ 项。没有这一项，质点起初的速度便会是 $n^2bp/(n^2-p^2)$。
- 把拉紧的条件写成 $x\geq -c$。只有当 A 固定不动时，这才是对的。

STEP 之外

这是一个无阻尼的受迫振子。它的响应由驱动频率（driving frequency）p 和固有频率（natural frequency）n 混合而成，而因子 $1/(n^2-p^2)$ 在 $p\to n$ 时趋向无穷大，这就是共振（resonance）。当 n/p 是无理数时，(nt,pt) 模 2π 的值会稠密地填满整个范围，所以 $n\sin nt-p\sin pt$ 可以任意接近 $n+p$。于是充分条件 $pb<(n-p)c$ 基本上也是必要条件（等号仍然容许）。关于受迫振动、共振和阻尼（damping），Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）有详尽的论述；微分方程方面，则可参看 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。