详细解答

STEP II 1991，第 11 题

力学 · 抛体与发射点的距离

> **STEP II 1991，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q11

关键思路

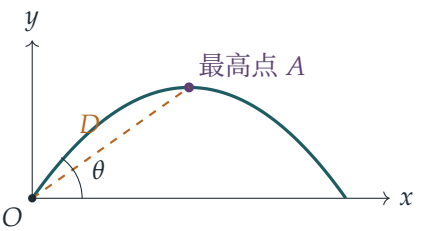
处理砲弹与大砲之间距离的*平方*：这样可以避开平方根，并把两部分都化为多项式（polynomial）问题。在第一部分，最高点距离的平方是 $\sin^2\theta$ 的二次式，所以用配方法（completing the square）（或求导）便可找出最佳角度。在第二部分，砲弹逐渐接近，当且仅当距离的平方正在递减，因此我们要考察它对时间的导数（derivative）在整个飞行过程中的正负。

解答

模型

我们把砲弹视为只受重力作用而自由运动的质点（particle），不计空气阻力，从原点 O（砲手所站之处）以速率 u、仰角（angle of elevation）θ 发射，其中 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$。取 x 为水平方向，y 为铅垂向上。在时间 t，

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$



仰角

当 $\dot{y} = u\sin\theta - gt = 0$，即 $t = u\sin\theta/g$ 时，砲弹到达最高点（apex）。此时

$$x_A = \frac{u^2\sin\theta\cos\theta}{g}, \qquad y_A = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

以 D 表示距离 OA，并设 $s = \sin^2\theta$，于是 $\cos^2\theta = 1 - s$。那么

$$\begin{aligned} D^2 = x_A^2 + y_A^2 &= \frac{u^4}{g^2}\left(\sin^2\theta\cos^2\theta + \tfrac{1}{4}\sin^4\theta\right) \\ &= \frac{u^4}{g^2}\left(s(1-s) + \tfrac{1}{4}s^2\right) = \frac{u^4}{g^2}\left(s - \tfrac{3}{4}s^2\right). \end{aligned}$$

由于损害随距离增加而减少，砲手希望 D 愈大愈好，这等同于令 D^2 愈大愈好。配方得

$$s - \tfrac{3}{4}s^2 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{4}\left(s - \tfrac{2}{3}\right)^2,$$

它恰好在 $s = \frac{2}{3}$ 时取得最大值 $\frac{1}{3}$。这个值是可以取到的，因为 $s = \sin^2\theta$ 可取 $(0,1)$ 内的每一个值。所以 $\sin^2\theta = \frac{2}{3}$，$\cos^2\theta = \frac{1}{3}$，从而

$$\boxed{\tan\theta = \sqrt{2}, \qquad \theta = \arctan\sqrt{2} \approx 54.7^\circ}$$

此时最高点与大砲的距离为 $D = \dfrac{u^2}{\sqrt{3}\,g}$。

砲弹在下降期间会否更接近砲手？

设 $r^2 = x^2 + y^2$ 为时间 t 时砲弹与大砲距离的平方。砲弹逐渐接近，当且仅当 r^2 正在递减，所以我们需要知道

$$\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) = x\dot{x} + y\dot{y}.$$

的正负。

> ? **想一想** 为甚么不直接把最高点的距离与之后几个点的距离比较一下？

只看几个点，并不能排除距离在它们之间曾经下跌的可能。导数却能一次过告诉我们飞行中每一刻的情况。由 $\dot{x} = u\cos\theta$ 及 $\dot{y} = u\sin\theta - gt$，

$$\begin{aligned} x\dot{x} + y\dot{y} &= u^2 t\cos^2\theta + \left(ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\right)(u\sin\theta - gt) \\ &= u^2 t - \tfrac{3}{2}ugt^2\sin\theta + \tfrac{1}{2}g^2t^3 \\ &= \tfrac{1}{2}t\left[(gt)^2 - 3u\sin\theta\,(gt) + 2u^2\right], \end{aligned}$$

其中用到 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$。当 $t > 0$ 时，其正负与方括号内的式子相同，而该式是 gt 的二次式。配方得

$$(gt)^2 - 3u\sin\theta\,(gt) + 2u^2 = \left(gt - \tfrac{3}{2}u\sin\theta\right)^2 + u^2\left(2 - \tfrac{9}{4}\sin^2\theta\right).$$

在所选的角度下 $\sin^2\theta = \frac{2}{3}$，所以常数项为 $u^2\left(2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}u^2 > 0$。因此方括号内的式子对每个 t 都严格为正，故 r^2 在整个飞行过程中严格递增（strictly increasing）。

所以答案是**不会**：砲弹在整个下降过程中一直远离砲手，而下降路径上最接近的一点就是最高点本身。这说明砲手只考虑砲弹在最大高度爆炸的捷径是合理的：对这个角度而言，最高点确实是下降路径上最接近的一点，距离为 $u^2/(\sqrt{3}\,g)$。

验算

- 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时，最高点位于 $(u^2/2g,\, u^2/4g)$，所以 $D^2 = \frac{5}{16}u^4/g^2$，比我们的最大值 $\frac{1}{3}u^4/g^2$ 略小，正如所料。
- 一般情况的计算显示，只有当 $\frac{9}{4}\sin^2\theta \geq 2$，即 $\sin\theta \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时，砲弹才开始会有接近的情况，对应的角度约为 70.5°，远高于 54.7°。（极限 $\theta \to \frac{\pi}{2}$ 的情况合乎常理：垂直向上发射的砲弹会笔直地朝大砲落回来。）
- 数值上，取 $u = g = 1$，对 θ 搜索，可得最高点距离的最大值 $0.57735 \approx 1/\sqrt{3}$，出现在 $\theta \approx 54.736°$；在该角度下沿轨迹（trajectory）逐步计算，可见与 O 的距离从不减少；而在 $70.5° \pm 0.6°$ 之间，距离由单调（monotonic）变为不单调。

常见错误

- 把最高点的水平距离或高度最大化，而不是把它与大砲的直线距离最大化。
- 以为砲弹在水平方向不断远离，所以过了最高点后与大砲的距离显然会增加。其实砲弹同时也在下坠，而当发射角度够陡时，它确实会回头接近大砲。

STEP 之外

对 r^2 而非 r 求导，再看 $\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}$ 的正负，是判断动点正在接近还是远离的标准方法，在向量力学（vector mechanics）以至轨道（orbits）的研究中随处可见。临界角 $\arcsin(2\sqrt{2}/3)$ 是一个经典结果：仰角低于此值时，抛体（projectile）与发射点的距离永远递增。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）阐述了以向量处理运动的方法，令这类论证显得自然而然。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。