详细解答

STEP II 1991，第 10 题

纯数学 · 三维空间中的直线与平面

STEP II 1991，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s2-q10

关键思路

虽然题库把这题归入另一类别，但它其实是一道关于三维空间中直线与平面的题目。影子的尖端，就是刚好掠过棒顶的那道太阳光线与地面相交之处。因此，我们把这道光线写成一条通过太阳与棒顶的直线，把地面写成一个通过棒底并与棒垂直的平面，然后求两者的交点。只要把所有位置都用沿棒方向的单位向量（unit vector）表示，一切便变得容易。

解答

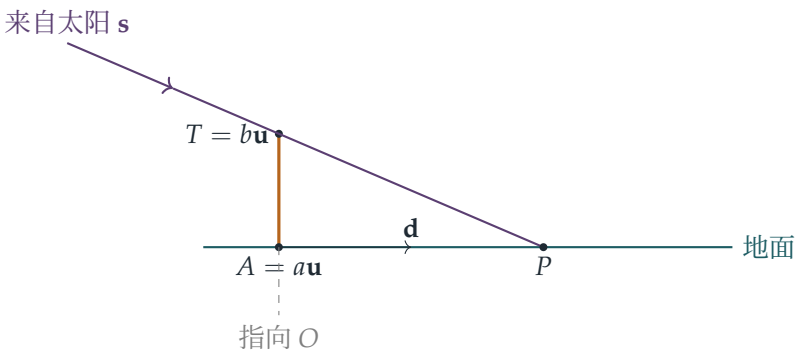
设 O 为地球的中心，并记

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{s} = R\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

那么 $\mathbf{u}$ 是沿棒方向的单位向量，棒底为 $A = a\mathbf{u}$，棒顶为 $T = b\mathbf{u}$，而太阳位于 $\mathbf{s}$。我们唯一需要的点积（dot product）是

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} = R\sin\theta\cos\phi.$$

为简便起见，记 $c = R\cos\phi\sin\theta$。



通过棒顶的光线

到达影子尖端 P 的光线，刚刚经过棒顶。所以 P 位于通过 $\mathbf{s}$ 与 $b\mathbf{u}$ 的直线上：

$$\mathbf{p} = \mathbf{s} + t\,(b\mathbf{u} - \mathbf{s}) = (1-t)\,\mathbf{s} + tb\,\mathbf{u}$$

其中 t 为某个实数。

地面

地面是水平的，即与棒垂直，并且通过棒底 $a\mathbf{u}$。由于 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$，地面就是平面 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{u} = a$。

求交点

把直线代入平面的方程，并利用 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 1$ 及 $\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} = c$，得

$$(1-t)c + tb = a \qquad \Longrightarrow \qquad t = \frac{c-a}{c-b}.$$

我们可以除以 $c-b$，因为太阳正照着这根棒。在棒顶处，太阳位于地平线之上，当且仅当它位于该处切平面（tangent plane）的另一侧，即 $\mathbf{s}\cdot\mathbf{u} > b$，所以 $c > b$。

> ? **想一想** 这个 P 真的在棒后方的地面上，而不是在太阳背后的某处吗?

由于 $c > b > a$，我们有 $c-a > c-b > 0$，所以 $t > 1$。$t = 0$ 的点是太阳，$t = 1$ 的点是棒顶，因此 $t > 1$ 表示已越过棒顶、背向太阳而行，正如所料。

由 t 的值可得

$$1 - t = \frac{(c-b)-(c-a)}{c-b} = \frac{a-b}{c-b} = -\frac{h}{c-b},$$
$$tb - a = \frac{b(c-a)-a(c-b)}{c-b} = \frac{c(b-a)}{c-b} = \frac{ch}{c-b}.$$

所以由棒底到影子尖端的位移（displacement）为

$$\begin{aligned}\mathbf{d} = \mathbf{p} - a\mathbf{u} &= (1-t)\,\mathbf{s} + (tb - a)\,\mathbf{u} \\ &= \frac{h}{c-b}(c\,\mathbf{u} - \mathbf{s}) \\ &= \frac{Rh}{c-b}\left[\cos\phi\sin\theta\begin{pmatrix}0\\ \cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}\right] \\ &= \frac{Rh}{c-b}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -(1-\cos^2\phi)\sin\theta\\ \cos\phi\sin\phi\sin\theta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由于 $1-\cos^2\phi = \sin^2\phi$ 及 $c - b = R\cos\phi\sin\theta - b$，上式即

$$\mathbf{d} = Rh\,(R\cos\phi\sin\theta - b)^{-1}\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin^2\phi\sin\theta\\ \cos\phi\sin\phi\sin\theta\end{pmatrix},$$

这正是所要求的结果。

中间那一行 $\mathbf{d} = \frac{h}{c-b}(c\,\mathbf{u} - \mathbf{s})$ 值得留意。向量 $c\,\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{s}$ 沿棒方向的分量（component），所以 $c\,\mathbf{u} - \mathbf{s}$ 就是太阳位置向量（position vector）的水平部分的负值。影子正正指向与太阳的水平方向相反的一方，与日常经验吻合。

验算

- $\mathbf{d}\cdot\mathbf{u} = \frac{Rh}{c-b}\left(-\sin^2\phi\sin\theta\cos\phi + \cos\phi\sin^2\phi\sin\theta\right) = 0$，所以影子确实贴着地面。
- 取 $\phi = 0$，则棒沿 y 轴方向。这时 $\mathbf{d} = \frac{Rh}{R\sin\theta - b}(-\cos\theta, 0, 0)$。当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，太阳在正上方，影子消失。当 R 极大时，影长趋向 $h\cot\theta$。这正是大家熟悉的结果：把地面视为平面、太阳仰角为 θ 时的影长。
- 数值方面，我们随机选取了数千组 R, a, h, θ, ϕ 的值（太阳均在地平线之上），直接以光线与地平面相交的方法求出影子尖端的位置。结果每次都与公式吻合，最大相对误差约为 10^{-13}。

常见错误

- 把地面当作平面 $y = a\cos\phi$, 或其他坐标平面。“水平”的意思是与 $\mathbf{u}$ 垂直, 即 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{u} = a$。
- 一开始就把所有东西按分量展开。把 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{s}$ 保留为向量，直到最后一行才展开，可以省却大量代数运算。

STEP 之外

在这里，太阳光是通过同一点（太阳）的一族直线，所以影子是棒在地平面上的中心投影（central projection）。当太阳非常遥远时，光线几乎平行，这个投影便变成平行投影（parallel projection）。这正是线性代数（linear algebra）所研究的那类映射，而向量 $c\,\mathbf{u} - \mathbf{s}$ 就是 $\mathbf{s}$ 在棒上的投影减去 $\mathbf{s}$ 本身。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）详细讨论了在直线和平面上的投影。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。