详细解答

STEP II 1991，第 1 题

纯数学 · 二次方程与判别式

> **STEP II 1991，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s2-q1

关键思路

一个二次式是某个完全平方（perfect square）的常数倍，当且仅当它有重根（repeated root），亦即它的判别式（discriminant）等于零。其后每一部分，都是把这一个条件应用于系数取决于 λ 的二次式。要找出令判别式等于零的 λ，便会得到一个关于 λ 的二次方程；至于分解式，则是解两条以 f 和 g 为未知量的线性方程而得。

解答

形式 $(*)$ 的条件

展开得

$$a(x+k)^2 = ax^2 + 2akx + ak^2.$$

若 $\mathrm{h}(x)$ 具有这个形式，则比较系数（comparing coefficients）可得 $b = 2ak$ 及 $c = ak^2$，所以

$$b^2 = 4a^2k^2 = 4a \cdot ak^2 = 4ac.$$

反过来说，若 $b^2 = 4ac$，取 $k = \dfrac{b}{2a}$（由于 $a \neq 0$，这是可行的）。于是 $2ak = b$ 且 $ak^2 = \dfrac{b^2}{4a} = c$，所以 $\mathrm{h}(x) = a(x+k)^2$。因此所求条件为

$$b^2 = 4ac,$$

即判别式等于零。

λ 的两个值

我们有

$$\mathrm{f}(x)+\lambda \mathrm{g}(x)=(3+\lambda)x^2+4x-2\lambda.$$

若 $\lambda=-3$，上式变成 $4x+6$。这并不属于形式 $(*)$，因为该形式要求 x^2 的系数不为零。所以 $3+\lambda\neq 0$，而根据上面的条件，我们需要

$$16=4(3+\lambda)(-2\lambda) \iff \lambda^2+3\lambda+2=0 \iff (\lambda+1)(\lambda+2)=0.$$

所以 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=-2$，两者皆不等于 -3。具体写出来，就是

$$\mathrm{f}(x)-\mathrm{g}(x)=2x^2+4x+2=2(x+1)^2,$$
$$\mathrm{f}(x)-2\mathrm{g}(x)=x^2+4x+4=(x+2)^2.$$

分解式

想一想 关于 $\mathrm{f}-\mathrm{g}$ 和 $\mathrm{f}-2\mathrm{g}$ 的两项事实，怎样能让我们分别求出 f 和 g?

把上面两条恒等式看成以 $\mathrm{f}(x)$ 和 $\mathrm{g}(x)$ 为未知量的联立线性方程（simultaneous linear equations）。从第一式减去第二式，得

$$\mathrm{g}(x)=2(x+1)^2-(x+2)^2,$$

然后 $\mathrm{f}(x)=(\mathrm{f}(x)-2\mathrm{g}(x))+2\mathrm{g}(x)=(x+2)^2+4(x+1)^2-2(x+2)^2$，即

$$\mathrm{f}(x)=4(x+1)^2-(x+2)^2.$$

展开验算：$4(x^2+2x+1)-(x^2+4x+4)=3x^2+4x$，以及 $2(x^2+2x+1)-(x^2+4x+4)=x^2-2$。所以其中一个选择是

$$A=4,\quad B=-1,\quad C=2,\quad D=-1,\quad m=1,\quad n=2.$$

把 m 和 n 的角色对调，便得到等价的答案 $m=2$、$n=1$、$A=-1$、$B=4$、$C=-1$、$D=2$。

最后部分

现在

$$\mathrm{f}(x)+\lambda \mathrm{g}(x)=(3+\lambda)x^2+4x+\lambda\alpha.$$

与之前一样，$\lambda=-3$ 给出线性式 $4x-3\alpha$，它永远不属于形式 $(*)$。当 $\lambda\neq -3$ 时，条件 $b^2=4ac$ 变成

$$16=4(3+\lambda)\lambda\alpha \iff \alpha\lambda^2+3\alpha\lambda-4=0. \qquad (\dagger)$$

我们要求满足 $(\dagger)$ 且 $\lambda\neq -3$ 的 λ 恰好只有一个。

想一想 (†) 会不会有两个根，而其中一个正是不容许的值 $\lambda = -3$?

不会。把 $\lambda = -3$ 代入 (†) 的左方，得 $9\alpha - 9\alpha - 4 = -4 \neq 0$，所以 $\lambda = -3$ 永远不是根。因此，符合要求的 λ 值正好就是 (†) 的根。

- 若 $\alpha = 0$，(†) 变成 $-4 = 0$，没有解。所以 $\alpha \neq 0$。
- 若 $\alpha \neq 0$，(†) 是一个名副其实的关于 λ 的二次方程。它恰好有一个根，当且仅当其判别式等于零：

$$9\alpha^2 + 16\alpha = 0 \iff \alpha(9\alpha + 16) = 0 \iff \alpha = -\tfrac{16}{9},$$

这里用到 $\alpha \neq 0$。

因此

$$\alpha = -\frac{16}{9}.$$

重根为 $\lambda = -\frac{3\alpha}{2\alpha} = -\frac{3}{2}$，而事实上

$$f(x) - \tfrac{3}{2}\left(x^2 - \tfrac{16}{9}\right) = \tfrac{3}{2}x^2 + 4x + \tfrac{8}{3} = \tfrac{3}{2}\left(x + \tfrac{4}{3}\right)^2.$$

验算

代入一个测试值来检查分解式：当 $x = 1$ 时，$4(2)^2 - (3)^2 = 7 = f(1)$，而 $2(2)^2 - 3^2 = -1 = g(1)$。在最后部分，$\frac{3}{2}(x + \frac{4}{3})^2$ 在 $x = 0$ 时的值是 $\frac{3}{2} \cdot \frac{16}{9} = \frac{8}{3}$，与 $\lambda\alpha = (-\frac{3}{2})(-\frac{16}{9})$ 吻合。以电脑测试所有满足 $|p| \leq 60$、$q \leq 12$ 的有理数 $\lambda = p/q$，结果在中间部分恰好找到 $\lambda = -1, -2$，而当 $\alpha = -\frac{16}{9}$ 时只找到 $\lambda = -\frac{3}{2}$。

常见错误

- 忘记 $(*)$ 中 $a \neq 0$ 的要求：当 $\lambda = -3$ 时，该式是线性的，你应该说明为何要排除这个值。
- 在最后部分，只写到“(†) 的判别式等于零”便停下来，没有处理 $\alpha = 0$ 的情况；这时 (†) 根本不是二次方程，而且没有根。

STEP 之外

把 f 和 g 写成两个线性型的平方的组合，就是把一对二次型（quadratic forms）同时对角化（simultaneous diagonalisation）。令 $f + \lambda g$ 退化（degenerate）的 λ 值，就是对应的对称矩阵（symmetric matrices）所满足的方程 $\det(F + \lambda G) = 0$ 的根，这是一个“广义

特征值”（generalised eigenvalue）问题。在最后部分，两个 λ 值重合，这正是这种对角化可能失败的情况。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）正是以这种观点处理二次型和特征值。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。