详细解答

# STEP I 1991，第 9 题

纯数学 · 不等式与调和级数

> **STEP I 1991，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q9

## 关键思路

在第 (i) 部分，每一条不等式（inequality）都把 $x$ 夹在两个 $k$ 次方根之间，窍门是找出互相矛盾的一个下界（lower bound）和一个上界（upper bound）。要在不用计算机的情况下比较立方根与五次方根，可把两边同时取十五次方。在第 (ii) 部分，我们用（项数）×（最小的项）作为一个长和式的下界。然后把这种形状、互不相交的区块串连起来，使调和级数（harmonic series）要多大有多大。

## 解答

### 第 (i) 部分

由于 $x > 1$，$x$ 的每一个幂都是正数，而把两个正数之间的不等式两边同时取正数次方，不等号的方向不变。以下会一直用到这一点。

为了引出矛盾，假设 $n \geq 5$。那么第三条和第五条不等式必然成立：

$$x^3 > 3 \qquad 及 \qquad x^5 < 6.$$

把第一式取五次方，第二式取三次方：

$$x^{15} > 3^5 = 243 \qquad 及 \qquad x^{15} < 6^3 = 216.$$

由此得 $243 < x^{15} < 216$，这是不可能的。所以 $n \geq 5$ 不会发生，因此 $n \leq 4$。

? **想一想** 你怎样知道要选第三条和第五条不等式?

每一条不等式都说明 $k^{1/k} < x < (k+1)^{1/k}$。下界 $k^{1/k}$ 依次为 1、1.41、1.44、1.41、1.38、...，在 $k = 3$ 时最大。上界 $(k+1)^{1/k}$ 则递减，而 $6^{1/5} \approx 1.43$ 是第一个跌到 $3^{1/3} \approx 1.44$

以下的。粗略心算一下便能找到这一对，然后十五次方就能严格地证明它。（$n = 4$ 这个值确实可以出现。例如 $x = 1.45$ 给出 $x^2 = 2.1025$、$x^3 \approx 3.05$、$x^4 \approx 4.42$。）

**第 (ii) 部分**

设 $n \geq 2$。和式 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ 共有 $n^2 - n$ 项，每一项都不小于最后一项 $\frac{1}{n^2}$。由于 $n \geq 2$，项数 $n^2 - n \geq 2$，所以第一项 $\frac{1}{n+1}$ 严格大于 $\frac{1}{n^2}$。因此

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > (n^2 - n) \cdot \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}.$$

两边同时加上 $\frac{1}{n}$，

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n^2} > 1,$$

这正是所要证明的。

**使调和和超过 10** 每一个区块 $\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m^2}$（其中 $m \geq 2$）的贡献都大于 1。要同时使用多个区块，它们必须互不重叠，所以我们让每个新区块紧接在上一个区块结束之后开始。定义

$$a_1 = 2, \qquad a_{k+1} = a_k^2 + 1,$$

于是 $a_1 = 2$，$a_2 = 5$，$a_3 = 26$，$a_4 = 677, \ldots$。第 $k$ 个区块由 $\frac{1}{a_k}$ 到 $\frac{1}{a_k^2}$，而下一个区块由 $\frac{1}{a_k^2+1} = \frac{1}{a_{k+1}}$ 开始。所以 $k = 1, \ldots, 9$ 的各个区块互不相交而且首尾相接，合起来刚好涵盖 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{a_9^2}$。因此

$$\sum_{n=1}^{a_9^2} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{k=1}^{9} \left( \frac{1}{a_k} + \cdots + \frac{1}{a_k^2} \right) > 1 + 9 = 10.$$

? **想一想** $a_9^2$ 是一个庞大无比的数。我们能否改为给出一个明确的 $N$？

可以，只要给 $a_k$ 定出上界。我们断言 $a_k < 2^{2^k}$。当 $k = 1$ 时，由于 $2 < 4$，断言成立。若 $a_k < 2^{2^k}$，则 $a_k \leq 2^{2^k} - 1$，所以

$$a_{k+1} = a_k^2 + 1 \leq (2^{2^k} - 1)^2 + 1 = 2^{2^{k+1}} - 2^{2^k+1} + 2 < 2^{2^{k+1}}.$$

于是由归纳法（induction）可知 $a_9 < 2^{512}$ 及 $a_9^2 < 2^{1024}$。再加上更多正数项只会令和变得更大，所以

$$N = 2^{1024} \quad \text{给出} \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} > 10.$$

任何更大的 $N$ 同样可行。

另一做法：把各项分成区块 $\frac{1}{2^j+1}+\cdots+\frac{1}{2^{j+1}}$，每个区块有 $2^j$ 项，而且每一项都不小于 $\frac{1}{2^{j+1}}$，由此可见当 $j\geq 1$ 时每个区块都大于 $\frac{1}{2}$，当 $j=0$ 时则等于 $\frac{1}{2}$。所以 $\sum_{n=1}^{2^{18}}\frac{1}{n}>1+\frac{18}{2}=10$，而 $N=2^{18}=262\,144$ 是一个小得多的答案。

## 验算

- 第 (i) 部分：从数值上看，当 $n=4$ 时，各条不等式剩下 $x\in(3^{1/3},5^{1/4})\approx(1.442,1.495)$。加入第五条不等式后必须有 $x<6^{1/5}\approx 1.431$，于是甚么也不剩。
- 第 (ii) 部分：用准确分数计算，$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$，而且对由 2 到 39 的每一个 $n$，区块的和都大于 1。
- 调和和在 $N=12\,367$ 时首次超过 10，所以任何正确的答案都必须不小于这个数。$2^{18}$（此时和约为 13.05）和 $2^{1024}$ 都绰绰有余。

## 常见错误

- 把不等式取次方时，没有指出两边都是正数（这里由 $x>1$ 保证）。
- 使用区块 $[2,4]$、$[4,16]$、$[16,256]$、...，这些区块共用端点，以致有些项被重复计算了两次。
- 在第 (ii) 部分写了 $\geq$ 而不是 $>$，却没有检查至少有一项严格大于 $\frac{1}{n^2}$。

## STEP 之外

第 (ii) 部分是柯西凝聚（Cauchy condensation）这个想法的一个版本。它证明了调和级数发散（diverge），只是发散得慢得惊人：它的部分和（partial sum）的增长有如 $\ln N+\gamma$，其中 $\gamma\approx 0.5772$ 是欧拉－马斯刻若尼常数（Euler–Mascheroni constant）。把和式与积分作比较，便可得出这个增长率，也令最小的 $N$ 容易估算（$e^{10-\gamma}\approx 12\,367$）。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本实分析入门书）对凝聚法和级数的收敛（convergence）有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。