详细解答

STEP I 1991，第 8 题

纯数学 · 代换积分法

STEP I 1991，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s1-q8

关键思路

代换（substitution）$y = \pi - x$ 把 $[0, \pi]$ 映射到自身，并且令 $\sin x$ 保持不变，却把碍事的因子 x 变成 $\pi - y$。把原积分与它反射后的版本相加，x 便完全消失。在第 (ii) 部分，被积函数（integrand）由一个函数及其导数构成，因此只要选对一个代换，便可一步到位。

解答

第 (i) 部分

设 $I = \int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$。我们需要一个能把 $[0, \pi]$ 两端对调、同时令 $\sin x$ 保持不变的代换，故取 $k = \pi$：令 $x = \pi - y$，于是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$，$\sin x = \sin(\pi - y) = \sin y$，而 $x = 0, \pi$ 分别对应 $y = \pi, 0$。因此

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^{0} (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_0^{\pi} (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y - I, \end{aligned}$$

这是因为 y 只是哑变量（dummy variable），所以最后一个积分就是 I 本身。由此可得

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

? **想一想** 怎样由 $\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}$ 得出 $\pi \int_0^{\pi/2}$?

由于 $\sin(\pi - x) = \sin x$，$\mathrm{f}(\sin x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的图像关于 $x = \frac{1}{2}\pi$ 对称。要严格说明这一

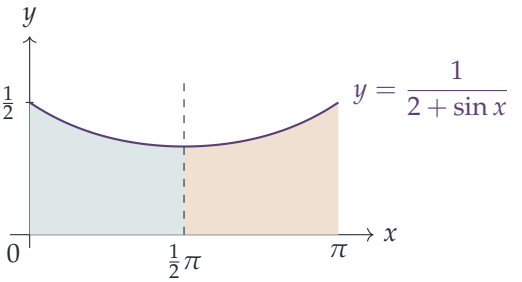
点，可把积分在 $\frac{1}{2}\pi$ 处分成两段，并对后半段使用同一个代换 $x = \pi - y$:

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^{0} \mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_{0}^{\pi/2} \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y.$$

所以 $\int_0^{\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi/2} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$，因此

$$\int_0^{\pi} x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x,$$

这正是所要证明的结果。



现取 $\mathrm{f}(u) = \dfrac{1}{2+u}$，它在 $u \in [-1,1]$ 上连续（continuous）。于是

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}.$$

余下的积分可用 $t = \tan\frac{1}{2}x$ 处理，此时

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

而 $x = 0, \frac{1}{2}\pi$ 分别对应 $t = 0, 1$。于是

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} &= \int_0^1 \frac{1}{2+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{2(1+t^2)+2t} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\tan^{-1}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\tan^{-1}\sqrt{3} - \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi^2}{9}.$$

第 (ii) 部分

想一想 $(\sin^{-1} t)^2$ 的导数是甚么?

根据链式法则（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin^{-1} t)^2 = \frac{2\sin^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}},$$

这恰好是与余弦相乘的那个因子（的两倍）。所以作代换 $u = (\sin^{-1} t)^2$，其中 $\mathrm{d}u = \dfrac{2\sin^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$。当 $t = 0$ 时，$u = 0$；当 $t = 1$ 时，$\sin^{-1} 1 = \frac{1}{2}\pi$，故 $u = \frac{1}{4}\pi^2$。因此

$$\int_0^1 \frac{(\sin^{-1} t)\cos[(\sin^{-1} t)^2]}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\pi^2/4} \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi^2}{4}.$$

被积函数在 $t = 1$ 处趋向无穷，所以严格来说这是一个瑕积分（improper integral）。代换把这个问题处理得干净利落：以 $\theta = \sin^{-1} t$ 表示，该积分就是 $\int_0^{\pi/2} \theta\cos\theta^2\,\mathrm{d}\theta$，其被积函数连续，所以积分收敛（converges），而上面求得的值是正确的。（分两步来做，先作 $\theta = \sin^{-1} t$，再作 $u = \theta^2$，也是完全可行的另一种做法。）

答案 $\frac{1}{2}\sin\frac{1}{4}\pi^2$ 是精确值，无法再化简：$\frac{1}{4}\pi^2$ 并不是一个“漂亮”的角，想必这就是考官提醒考生不要动用计算机的原因。

验算

- 以辛普森法则（Simpson's rule）计算，得 $\int_0^{\pi} x/(2+\sin x)\,\mathrm{d}x \approx 1.899406$，而 $\pi^2/(3\sqrt{3}) \approx 1.899406$。
- 快速检查一下是否合理：$\frac{1}{3} \le \frac{1}{2+\sin x} \le \frac{1}{2}$，所以该积分介乎 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 \approx 1.64$ 与 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 \approx 2.47$ 之间。
- 第 (i) 部分的恒等式可用 $\mathrm{f}(u) = 1$ 来检验：两边都等于 $\frac{1}{2}\pi^2$。
- 至于第 (ii) 部分，$\frac{1}{2}\sin(\frac{1}{4}\pi^2) \approx 0.312133$，与 $\int_0^{\pi/2}\theta\cos\theta^2\,\mathrm{d}\theta$ 的数值计算结果吻合。

常见错误

- 做到 $I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$ 便停下来，没有说明为何可以把积分范围减半。
- 作代换 $t = \tan\frac{1}{2}x$ 时忘记更改积分上下限（上限变成 1，而不是 ∞）。
- 在第 (ii) 部分漏掉因子 $\frac{1}{2}$：$\mathrm{d}u$ 带有一个 2。

STEP 之外

第 (i) 部分的技巧，是利用区间的对称性来计算 $\int x\,g(x)\,\mathrm{d}x$，全程无须求出原函数（antiderivative）。这是一个重要主题的小小例子：要知道一个积分的值，借助对称性往往比直接计算省力得多。第 (ii) 部分则触及瑕积分的理论：变量代换可以把无界的被积函数变成连续函数。Abbott 的 *Understanding Analysis* 严格地建立了变量代换定理（change-of-variables theorem），而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则收录了更多这类积分。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。