详细解答

STEP I 1991，第 7 题

纯数学 · 可分离变量微分方程

> **STEP I 1991，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q7

关键思路

两个变化率都是 $(1+V/V_0)^2$ 的常数倍，所以最自然的变量是 $u = 1 + V/V_0$，它满足 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \pm c\,u^2$。分离变量（separating the variables）后可见，倒数 $w = 1/u$ 只是随时间线性变化：在增长年以速率 a 下降，在衰退年以速率 b 上升。于是整个问题归结为追踪一条由直线段组成的图像，并回答两个问题：w 会否到达 0（金额变成无限大），又会否到达 1（国库空了）？

解答

建立模型

以年为单位量度 t，并写 $V = kV_0$，于是 $u = 1 + k$，且 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = V_0\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$。在增长年，

$$V_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = aV_0u^2 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = a \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) = -a,$$

同理，在衰退年（只要 $V > 0$），$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{u}\right) = +b$。因此，设

$$w = \frac{1}{1+V/V_0},$$

则 w 在增长期间以速率 a 线性下降，在衰退期间以速率 b 线性上升。注意 $V \geq 0$ 对应 $0 < w \leq 1$：国库空了当且仅当 $w = 1$，而 $V \to \infty$ 当且仅当 $w \to 0^+$。

不等式的意义

开始时 $w = w_0 = \frac{1}{1+k_0}$，而在第一年内 $w = w_0 - at$。于是：

- $k_0 \geq 0$ 只是说国库的存款不可能是负数。
- 金额在整个第一年内保持有限，当且仅当 w 直到 $t = 1$ 都保持正值，即 $w_0 - a > 0$，亦即
$$\frac{1}{1+k_0} > a \iff 1 + k_0 < \frac{1}{a} \iff k_0 < a^{-1} - 1.$$
假如这个条件不成立，V 便会在时间 $t = w_0/a \leq 1$，即第一年之内，变成无限大；对任何描述真实国库的模型来说，这都是荒谬的。

两个不等式合起来还迫使 $a^{-1} - 1 > 0$，即 $a < 1$；我们会在最后用到这一点。

撑过第二年

第一年结束后 $w_1 = \frac{1}{1+k_1}$（事实上 $w_1 = w_0 - a$）。在衰退年内，只要 $w < 1$，就有 $w = w_1 + bt$。国库在年底仍未空，当且仅当 w 到 $t = 1$ 时仍未到达 1：

$$\frac{1}{1+k_1} + b < 1 \iff b < \frac{k_1}{1+k_1}.$$

特别地，我们需要 $b < 1$，这时上式可整理成

$$k_1 > \frac{b}{1-b}.$$

反之，若 $b \geq \frac{k_1}{1+k_1}$，存款会在时间 $t = (1 - w_1)/b \leq 1$ 耗尽，并在该年余下的时间一直维持为零。

第三年的无限增长

> ? **想一想** 假如国库在第二年空了，会怎样？它还有可能在第三年爆破吗？

若国库在第二年年底是空的，第三年便由 $w = 1$ 开始，且 $w = 1 - at$；由于 $a < 1$，它在整年内都保持正值。所以空了的国库不可能在第三年爆破，我们只需考虑存款撑得过第二年的情况。

在这情况下 $w_2 = w_1 + b = \frac{1}{1+k_0} - a + b$，而在第三年 $w = w_2 - at$。金额在第三年内变成无限大，当且仅当 w 在 $t = 1$ 或之前到达 0，即 $w_2 \leq a$：

$$\frac{1}{1+k_0} - a + b \leq a \iff b \leq 2a - \frac{1}{1+k_0}.$$

我们必须检查这与“但不会更早”是否一致。

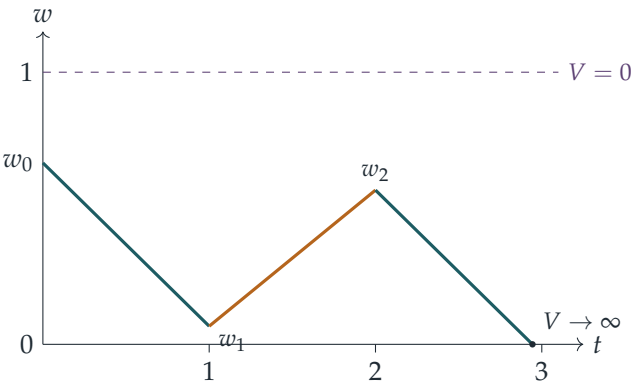
- $k_0 < a^{-1} - 1$ 保证了第一年不会爆破；第二年金额正在减少，也不可能爆破。
- 存款撑得过第二年：若 $w_2 \leq a$，则因 $a < 1$ 而有 $w_2 < 1$，所以存活条件 $w_2 < 1$ 自动成立。

因此，模型预测第三年出现无限增长而不会更早，当且仅当

$$b \le 2a - \frac{1}{1+k_0}.$$

若不等式严格成立，V 会在第三年开始后的时间 $t = w_2/a < 1$ 变成无限大；在等号成立的情况下，$V \to \infty$ 恰好发生在第三年结束之时。（由于 $b > 0$，这只有在 $2a > \frac{1}{1+k_0}$，即 $k_0 > \frac{1}{2a} - 1$ 时才可能发生。）

下图显示 $a = 0.6$、$b = 0.5$、$k_0 = 0.5$ 时 w 对 t 的图像，这是条件成立的一个例子。



验算

在上面的例子中，$k_1 = 14$，存活条件 $14 > \frac{0.5}{0.5} = 1$ 成立；然后 $k_2 = \frac{13}{17} \approx 0.765$，而第三年的爆破发生在 $t = w_2/a \approx 0.944$，与 $2a - \frac{1}{1+k_0} - b = \frac{1}{30} > 0$ 一致。我们亦以数值方法（四阶龙格－库塔法，Runge–Kutta）对这些微分方程（differential equations）作积分，随机选取了 300 组 a、b 和 k_0：k_1 和 k_2 的闭合式与数值结果相差约 10^{-11}，而存活准则和爆破准则在每一个情况下都正确预测了数值结果。

常见错误

- 忘记国库可能在第二年空了。在这题中，由于 $a < 1$，这并无影响，但必须说明。
- 把爆破条件弄反：爆破对应的是 $1/(1+k)$ 到达 0，而不是 k 到达 0。
- 把 $\frac{1}{1+k_1} + b < 1$ 整理成关于 k_1 的条件时，忽略了 $b < 1$ 这个要求。

STEP 之外

方程 $\dot{u} = au^2$ 是有限时间爆破（finite-time blow-up）的标准例子：与指数增长不同，它的解可以在有限时间内变成无限大，所以微分方程的解不一定对所有时间都存在。在大学第一门常微分方程（ODE）课程中，解的局部存在性（local existence）与整体存在性（global existence）之分，正是在这里出现。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）在处理非线性一阶方程时讨论了这一点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。