详细解答

STEP I 1991，第 6 题

纯数学 · 驻点与广义积分

> **STEP I 1991，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q6

本题在 *Beyond STEP* 第 3.1 节找出错处中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/spot-the-flaw.html

关键思路

甚么都不要轻信：每一项计算都要亲自重做一遍，并在每个“因此”或“所以”之处问一问，这一步是否真的成立。在 (i) 中，导数（derivative）算错了；而且即使驻点（stationary point）求对了，其后关于极大值、极小值和全局界的推理仍然有毛病。在 (ii) 中，原函数（antiderivative）是错的；更严重的是，被积函数（integrand）在区间内部趋向无穷，所以微积分基本定理（fundamental theorem of calculus）根本不能使用。

解答

第 (i) 部分

第 1 步：驻点。由商法则（quotient rule），

$$g'(x) = \frac{6x^2(x^4+4) - 4x^3(2x^3+3)}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^6 - 12x^3 + 24x^2}{(x^4+4)^2} = \frac{-2x^2\,(x^4+6x-12)}{(x^4+4)^2}.$$

所以 $g'(x) = 0$ 当且仅当 $x = 0$ 或 $h(x) = 0$，其中 $h(x) = x^4 + 6x - 12$。现在 $h(1) = -5$ 而 $h(-1) = -17$，所以 $x = \pm 1$ 并不是驻点：事实上 $g'(1) = \frac{2}{5}$ 而 $g'(-1) = \frac{34}{25}$。原来的论断在第一步就已经不成立。

h 有多少个根？由于 $h'(x) = 4x^3 + 6$ 只在 $x_0 = -(3/2)^{1/3}$ 处为零，h 先递减后递增，所以它最多穿过零两次。另外 $h(0) = -12 < 0$，而且当 $x \to \pm\infty$ 时 $h(x) \to +\infty$，所以

它最少穿过零两次。因此 h 恰好有两个实根 $\beta < 0 < \alpha$。由于 $h(1) < 0 < h(2) = 16$ 及 $h(-3) = 51 > 0 > h(-2) = -8$,

$$1 < \alpha < 2, \qquad -3 < \beta < -2,$$

而数值上 $\alpha \approx 1.386$，$\beta \approx -2.247$。

第 2 步：驻点处的函数值。$g(0) = \frac{3}{4}$ 是对的，$g(1) = 1$ 也是对的，但 $g(-1) = \frac{1}{5}$，而不是 1（何况 ± 1 这两点根本都不是驻点）。在 h 的根 t 处，我们有 $t^4 = 12 - 6t$，所以 $t^3 = (12 - 6t)/t$，并且

$$g(t) = \frac{2(12-6t)/t + 3}{16 - 6t} = \frac{24 - 9t}{t(16 - 6t)} = \frac{3(8-3t)}{2t(8-3t)} = \frac{3}{2t},$$

其中约去了 $8 - 3t \neq 0$（因为 $t = \frac{8}{3}$ 不是 h 的根）。所以驻点处的函数值是 $g(0) = \frac{3}{4}$、$g(\alpha) = \frac{3}{2\alpha} \approx 1.083$ 和 $g(\beta) = \frac{3}{2\beta} \approx -0.668$。

? **想一想** 如果一个驻点处的函数值比另一个小，较小的那个就一定是极小值吗?

第 3 步：驻点的性质。不一定。比较驻点处的函数值，完全不能告诉我们驻点的性质；我们必须考察 g' 在驻点两侧的正负号（或者考察 g''）。由因式分解后的形式可见，当 $x \neq 0$ 时，$g'(x)$ 的正负号与 $-h(x)$ 的正负号相同，因为 $x^2 > 0$ 而 $(x^4 + 4)^2 > 0$。由于在 (β, α) 上 $h < 0$，而在 $[\beta, \alpha]$ 之外 $h > 0$:

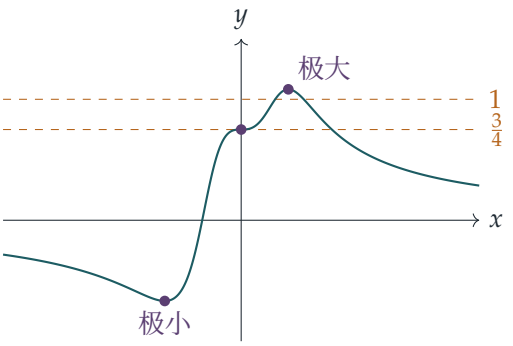
- g 在 $x < \beta$ 时递减，在 (β, α) 上递增，在 $x > \alpha$ 时递减；
- $x = \beta$ 是极小点，而 $x = \alpha$ 是极大点；
- 在 $x = 0$ 处，两侧都有 $g' > 0$，所以 $x = 0$ 是驻拐点（stationary point of inflection），而不是极小点。

第 4 步：全局界。即使局部极大值和极小值都求对了，要得出“对所有 x”都成立的界，还需要更多论据：函数可以在别处超过某个局部极大值，例如当 $x \to \pm\infty$ 时。这里当 $x \to \pm\infty$ 时 $g(x) \to 0$（分母的次数较高），而且由于 $x^4 + 4 > 0$，g 处处连续。把这些与第 3 步的单调性（monotonicity）结合起来，g 由接近 0 的值下降至 $g(\beta)$，再上升至 $g(\alpha)$，然后回落并趋向 0。因此正确的结论是

$$\frac{3}{2\beta} \leq g(x) \leq \frac{3}{2\alpha} \quad \text{对所有} x, \qquad \text{即约为} -0.668 \leq g(x) \leq 1.083,$$

而且两个界都可以取到。

结论。$\frac{3}{4} \leq g(x) \leq 1$ 这个结论在两端都不成立：$g(-1) = \frac{1}{5} < \frac{3}{4}$（其实只要 $2x^3 + 3 < 0$ 就有 $g(x) < 0$），而 $g(\alpha) > 1$ 是因为 $\alpha < \frac{3}{2}$（验证：$h(\frac{3}{2}) = \frac{81}{16} - 3 > 0$，所以 $\alpha < \frac{3}{2}$，从而 $\frac{3}{2\alpha} > 1$）。



第 (ii) 部分

第 1 步：不定积分。题中给出的答案是错的：对 $-3(1-x)^{-4}$ 求导得到 $-12(1-x)^{-5}$，而不是 $(1-x)^{-3}$。幂次应该*增加* 1，由 -3 变为 -2。由于

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x)^{-2} = -2(1-x)^{-3}\cdot(-1) = 2(1-x)^{-3},$$

正确的结果是

$$\int (1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}(1-x)^{-2} + c, \qquad x \neq 1.$$

? **想一想** 用正确的原函数，在 -1 与 3 之间同样得到 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = 0$。那么答案终究还是 0 吗？

第 2 步：定积分。不是。只有当 $F' = f$ 在整个区间上成立，而且 f 在该区间上连续时，计算 $[F(x)]_{-1}^{3}$ 才有根据。这里 $(1-x)^{-3}$ 在 $x = 1$ 处没有定义，而这一点位于 $[-1,3]$ 之内，并且函数在该点附近无界，所以这是一个瑕积分（improper integral），必须定义为两段各自的极限：

$$\int_{-1}^{1-\varepsilon}(1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(\varepsilon^{-2} - \tfrac{1}{4}\right) \to +\infty \quad (\varepsilon \to 0^{+}),$$
$$\int_{1+\delta}^{3}(1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4} - \delta^{-2}\right) \to -\infty \quad (\delta \to 0^{+}).$$

两段都发散（diverge），所以这个积分不存在；“$\infty - \infty$”没有值。从几何上看这也合理：被积函数在 $x < 1$ 时为正，在 $x > 1$ 时为负，而两边各自围出的面积都是无穷大。

结论。两步都是错的，而且照原样来说结论并不成立：$\int_{-1}^{3}(1-x)^{-3}\,\mathrm{d}x$ 没有定义。这个“0”只有在挖去一个*对称*的缺口，即 $\varepsilon = \delta$ 时，才算有几分道理：这时两段恰好互相抵消，极限是 0（即柯西主值，Cauchy principal value）。但假如取 $\delta = 2\varepsilon$，两段之和便是 $\frac{1}{2}(\varepsilon^{-2} - \frac{1}{4}\varepsilon^{-2}) \to \infty$，所以答案取决于我们怎样趋近 $x = 1$，这正是这个积分没有定义的原因。

验算

在随机选取的点上，g 的数值导数与因式分解后的公式吻合；$g'(1) = 0.4 \neq 0$。用二分法（bisection）求得 $\alpha \approx 1.3856$，$\beta \approx -2.2467$，并且 $g(\alpha) = 1.0825 = 3/(2\alpha)$，$g(\beta) = -0.6676 = 3/(2\beta)$；在 $[-100, 100]$ 上对 g 取样，可确认这两个值就是全局最大值和最小值。至于 (ii)，在 $[-1, 0.99]$ 上用中点求积法（midpoint quadrature）得到约 4999.87，与 $\frac{1}{2}(10^4 - \frac{1}{4})$ 吻合，而对应的另一段在 $[1.01, 3]$ 上得到 -4999.87。

常见错误

- 靠比较驻点处的函数值来判断驻点的性质。
- 声称得到全局界时，忘记考虑 $x \to \pm\infty$ 时的表现。
- 跨过被积函数趋向无穷的点使用 $[F(x)]_a^b$；务必先检查被积函数在 $[a, b]$ 上是否连续。

STEP 之外

第 (ii) 部分讲的是瑕积分：若积分区间包含奇点（singularity），积分便要定义为极限，而且只有当两个单侧极限各自存在时，积分才收敛（converge）。对称极限，即柯西主值，在复分析（complex analysis）和物理学中确实是很有用的概念，但它是另一回事。第 (i) 部分讲的是局部极值与全局极值之间的差距，数学分析藉极值定理（extreme value theorem）把这一点说得精确。Abbott 的 *Understanding Analysis* 对这两个课题都有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。