详细解答

STEP I 1991，第 5 题

纯数学 • 正则向量组

> **STEP I 1991，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q5

关键思路

条件 (ii) 说这些向量（vector）之和为 $\mathbf{0}$，而要把一条向量等式化为一个数，最省力的方法就是与其中一个向量取点积（dot product），条件 (i) 正好告诉我们怎样计算这些点积。此后，整道题目其实是在计数数目：若一个向量与某几个固定向量的点积全部已被指定，它可处的位置就寥寥无几，所以集合内只容得下少数几个向量。

解答

恒等式 $(n-1)\beta = -\alpha^2$

由 (ii)，$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \cdots + \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$。将等式两边与 $\mathbf{a}_1$ 取点积。由 (i)，$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1$ 一项等于 α^2，而其余 $n-1$ 项 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_j$（$j \neq 1$）每项均为 β，所以

$$\alpha^2 + (n-1)\beta = 0, \qquad \text{即} \qquad (n-1)\beta = -\alpha^2,$$

这正是所要证明的。特别地，$\beta = -\alpha^2/(n-1) < 0$。

二维情况

现在 $\alpha^2 = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = 1$，所以每个 $\mathbf{a}_i$ 都是单位向量（unit vector），并且

$$\beta = -\frac{1}{n-1}.$$

对 $i \geq 2$，设 $\mathbf{a}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$。条件 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_i = \beta$ 即是 $x_i = \beta$，于是 $|\mathbf{a}_i| = 1$ 迫使 $y_i = \pm\sqrt{1-\beta^2}$。因此，除 $\mathbf{a}_1$ 以外的每个向量都必定是以下两者之一：

$$\begin{pmatrix} \beta \\ \sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \beta \\ -\sqrt{1-\beta^2} \end{pmatrix}.$$

想一想 知道了候选向量之后，怎样限制 n 的大小?

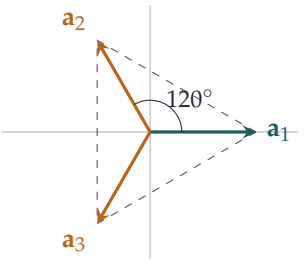
集合中的向量互不相同，所以 $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ 是 $n-1$ 个不同的候选向量。候选向量最多只有两个，所以 $n-1 \leq 2$，即 $n \leq 3$。由于 $n \geq 2$，故 $n = 2$ 或 $n = 3$。

$n = 2$。此时 $\beta = -1$，两个候选向量重合，$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$。这确实可行：$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = -1 = \beta$，而且 $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{0}$。

$n = 3$。此时 $\beta = -\frac{1}{2}$，$\sqrt{1-\beta^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，而 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 必须是那两个不同的候选向量：

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

（次序不拘）。验算：$\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} = \beta$，而三个向量之和为 $\mathbf{0}$。它们指向一个以原点为中心的等边三角形（equilateral triangle）的顶点。



（确定 β 的另一个方法：当 $n \geq 3$ 时，我们有 $-1 < \beta < 0$，所以两个候选向量确实不同，而 $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 必须分别是这两个向量。于是 $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 = \beta^2 - (1-\beta^2) = 2\beta^2 - 1$，令它等于 β 便得 $(2\beta+1)(\beta-1) = 0$。所以 $\beta = -\frac{1}{2}$，这同样表示 $n = 3$。）

三维情况

同样有 $\alpha = 1$ 及 $\beta = -1/(n-1)$。$n = 2$ 的情况与之前一样：$\beta = -1$，而满足 $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = -1$ 的单位向量只有 $\mathbf{a}_2 = -\mathbf{a}_1 = (-1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，它位于 x-y 平面上。所以 $\{\mathbf{a}_1, -\mathbf{a}_1\}$ 是其中一个答案。

现在假设 $n \geq 3$，于是 $-\frac{1}{2} \leq \beta < 0$。由于 $\mathbf{a}_2$ 位于 x-y 平面上，沿用二维情况的论证可得

$$\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \varepsilon\sqrt{1-\beta^2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

而且因为 $\beta \neq \pm 1$，y 分量 $y_2 = \varepsilon\sqrt{1-\beta^2}$ 不等于零。

想一想 对于 $i \geq 3$，这些条件对 $\mathbf{a}_i$ 有甚么要求?

对 $i \geq 3$，设 $\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i)^{\mathrm{T}}$。则

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_i = \beta &\implies x_i = \beta, \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_i = \beta &\implies \beta^2 + y_2 y_i = \beta \implies y_i = \frac{\beta(1-\beta)}{y_2}, \\ |\mathbf{a}_i| = 1 &\implies z_i^2 = 1 - \beta^2 - y_i^2. \end{aligned}$$

所以对每个 $i \geq 3$，x_i 和 y_i 都相同，而 z_i 只能是两个平方根的其中之一。由于各向量互不相同，$\mathbf{a}_3, \ldots, \mathbf{a}_n$ 当中最多只有两个向量，所以 $n - 2 \leq 2$，即 $n \leq 4$。

$n = 3$。由 (ii)，$\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$，它位于 x-y 平面上。所以这个集合是平面 $z = 0$ 上的一个正则集（regular set），根据二维情况的结果，它就是

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\mathbf{a}_2$ 可以是后两者的任何一个。（这与上面的公式吻合：$\beta = -\frac{1}{2}$ 给出 $y_3 = -y_2$ 及 $z_3^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = 0$。）

$n = 4$。此时 $\beta = -\frac{1}{3}$，所以 $\sqrt{1-\beta^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$，而 $y_2 = \varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3}$。于是

$$y_i = \frac{(-\frac{1}{3})(\frac{4}{3})}{\varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\varepsilon\frac{2}{3\sqrt{2}} = -\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{3}, \qquad z_i^2 = 1 - \frac{1}{9} - \frac{2}{9} = \frac{2}{3}.$$

由于 $\mathbf{a}_3 \neq \mathbf{a}_4$，它们必须分别取两个相反的值 $z = \pm\sqrt{2/3} = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$。由此得出

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \varepsilon\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\varepsilon\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix},$$

对应 $\varepsilon = \pm 1$ 的每个选择各有一个集合。我们至今只用了涉及 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$ 的条件，所以仍须检查其余条件。首先，$\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_4 = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} - \frac{6}{9} = -\frac{1}{3} = \beta$。其次是向量之和：$x$ 分量给

出 $1-3\cdot\frac{1}{3}=0$，y 分量给出 $\varepsilon\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)=0$，而 z 分量互相抵销。所以两个集合都是正则集。从几何上看，这四个向量指向一个以原点为中心的正四面体（regular tetrahedron）的顶点。

总结。所有正则集为：$\{\mathbf{a}_1,-\mathbf{a}_1\}$（$n=2$）；$x$-$y$ 平面上的等边三角形（$n=3$）；以及上述两个正四面体（$n=4$，$\varepsilon=\pm1$，两者关于 x-z 平面互为镜像）。不存在 $n\geq 5$ 的正则集。

验算

在每个集合中，向量之和应为零，而且所有两两之间的点积都应相等。对于正四面体，任意两个向量之间的夹角为 $\cos^{-1}(-\frac{1}{3})\approx 109.47°$，即大家熟悉的甲烷键角，而恒等式给出 $(4-1)(-\frac{1}{3})=-1=-\alpha^2$。我们以数值方法检查了全部五个集合（格拉姆矩阵和形心（centroid）准确至 10^{-12}），并在平面上进行穷举搜索，在 n 不超过 11 的范围内，只在 $n=2$ 和 $n=3$ 时找到正则集。

常见错误

- 忘记向量必须*互不相同*：正是这个条件，才把“最多两个候选向量”变成 n 的上界。
- 在 $n=4$ 的情况中，利用 $\mathbf{a}_3,\mathbf{a}_4$ 与 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2$ 的点积求出它们之后，没有检查 $\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{a}_4=\beta$ 和形心条件。
- 遗漏 $n=2$ 的情况，或遗漏三维情况中正负号 ε 的选择。

STEP 之外

这些集合就是正单纯形（regular simplex）的顶点：在 $(n-1)$ 维空间中的 n 个点，两两之间的距离全部相等。由点积组成的矩阵（matrix）$G=(\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{a}_j)$（即*格拉姆矩阵*（Gram matrix））等于 $(\alpha^2-\beta)I+\beta J$，其中 J 是所有元素皆为一的矩阵。它的秩（rank）是 $n-1$，而格拉姆矩阵的秩不能超过空间的维数，由此立即得出在 d 维空间中 $n\leq d+1$。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教材）涵盖了秩、点积和格拉姆矩阵。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。