详细解答

STEP I 1991，第 4 题

纯数学 · 几何中的最优化

> **STEP I 1991，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q4

关键思路

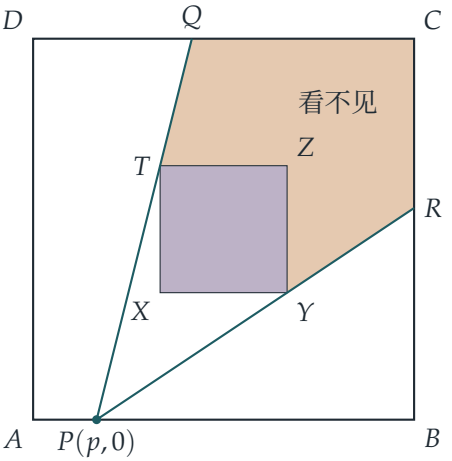
守卫能看见庭院中的每一点，只有被塔楼挡住的点除外，所以我们按照提示，求出从他所在位置 $P=(p,0)$ 望去时塔楼“阴影”的面积。阴影的边界是由 P 出发、刚好擦过塔楼的两条射线。求出这两条射线与围墙的交点，把阴影当作多边形计算其面积，问题便化为在 $[0,4]$ 上求一个单变量函数的最大值。记得检查端点。

解答

建立模型

庭院是大正方形减去塔楼，面积为 $144-16=128$。设守卫位于 $P=(p,0)$，其中 $0\le p\le 4$，并设 $H(p)$ 为他看不见的面积。可见面积为 $128-H(p)$，所以 H 最大时可见面积最小，反之亦然。

由于 $p\le 4$，P 位于直线 $y=4$ 之下，并在直线 $x=4$ 的左方（或在该直线上）。因此从 P 望去，塔楼露出它的底面 XY 和左面 XT，而它的轮廓由顶角 $T(4,8)$ 和 $Y(8,4)$ 决定。顶角 $Z(8,8)$ 位于角 TPY 之内，是看不见的。看不见的区域位于路径 $T\to Z\to Y$ 之外，夹在射线 PT 与 PY 之间。



擦边射线与围墙的交点

由 P 出发穿过 $T(4,8)$ 的射线，每横移 $4-p$ 便上升 8，所以它到达 $y=12$ 时

$$x = p + \tfrac{12}{8}(4-p) = 6 - \tfrac{p}{2}, \qquad \text{由此得} Q = \left(6 - \tfrac{p}{2},\ 12\right).$$

由于 $4 \le 6 - \frac{p}{2} \le 6$，这一点确实在上方的围墙 DC 上。

由 P 出发穿过 $Y(8,4)$ 的射线，每横移 $8-p$ 便上升 4，所以它到达 $x=12$ 时

$$y = \frac{4(12-p)}{8-p}, \qquad \text{由此得} R = \left(12,\ \frac{4(12-p)}{8-p}\right).$$

当 p 由 0 增至 4 时，这个值由 6 增至 8，所以 R 在右方的围墙 BC 上。

看不见的面积

看不见的区域是多边形 $TQCRYZ$。求其面积最简便的方法是

$$H = [PRCQ] - [PYZT],$$

其中 $[\cdots]$ 表示面积：即两条射线之间一直伸延至围墙的整个楔形，减去楔形中位于塔楼远侧两面之前的部分（塔楼前方看得见的地面，连同塔楼本身）。

对 $P(p,0)$、$R(12,q)$、$C(12,12)$、$Q(r,12)$ 使用鞋带公式(shoelace formula)，其中 $q = \frac{4(12-p)}{8-p}$ 及 $r = 6 - \frac{p}{2}$：

$$\begin{aligned}[PRCQ] &= \tfrac{1}{2}(pq + (144-12q) + (144-12r) - 12p) \\ &= \tfrac{1}{2}(288 - 12p - 12r - (12-p)q) = 108 - 3p - \frac{2(12-p)^2}{8-p},\end{aligned}$$

这里用了 $12r = 72 - 6p$。同样地，对 $P(p,0)$、$Y(8,4)$、$Z(8,8)$、$T(4,8)$：

$$[PYZT] = \tfrac{1}{2}(4p + 32 + 32 - 8p) = 32 - 2p.$$

因此

$$H(p) = 76 - p - \frac{2(12-p)^2}{8-p}.$$

想一想 有没有一个代换（substitution）能令这个函数容易求最大、最小值?

分母不好处理，这提示我们设 $u = 8 - p$，于是 u 的取值范围是 $[4,8]$，而 $12 - p = u + 4$。这样

$$H = 76 - (8-u) - \frac{2(u+4)^2}{u} = 68 + u - \frac{2u^2 + 16u + 32}{u} = 52 - \left(u + \frac{32}{u}\right).$$

第 (i) 部分：最小可见面积

我们需要 H 尽可能大，即 $u + \frac{32}{u}$ 尽可能小。根据算术平均—几何平均不等式（AM–GM inequality），对 $u > 0$,

$$u + \frac{32}{u} \;\geq\; 2\sqrt{32} = 8\sqrt{2},$$

等号恰好在 $u = \frac{32}{u}$ 时成立，即 $u = 4\sqrt{2}$。这个值在 $[4,8]$ 之内（因为 $4\sqrt{2} \approx 5.66$），所以是容许的。于是 $p = 8 - u$，而当守卫位于以下位置时，可见面积最小：

$$\boxed{p = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2.34 \text{ 个单位，距离点} A}$$

在这一点，他看不见的面积是 $52 - 8\sqrt{2}$，所以他看见 $76 + 8\sqrt{2} \approx 87.3$ 平方单位。

第 (ii) 部分：最大可见面积

现在我们需要 H 尽可能小，即 $f(u) = u + \frac{32}{u}$ 在 $[4,8]$ 上尽可能大。由于 $f'(u) = 1 - \frac{32}{u^2}$，$f$ 在 $[4, 4\sqrt{2}]$ 上递减，在 $[4\sqrt{2}, 8]$ 上递增，所以它的最大值在端点取得。我们有

$$f(4) = 4 + 8 = 12, \qquad f(8) = 8 + 4 = 12,$$

两者相等。所以 H 在 $u = 8$ 和 $u = 4$ 两处，即 $p = 0$ 和 $p = 4$ 两处，都取得其最小值 $52 - 12 = 40$。可见面积最大，为 $128 - 40 = 88$ 平方单位，此时守卫站在

$$\boxed{\text{位于} A\ (p = 0) \text{ 或} E\ (p = 4)}$$

而 AE 上再没有其他点能做到。

验算

- 当 $p = 0$ 时，我们可以直接手算阴影：两条射线与围墙相交于 $(6, 12)$ 和 $(12, 6)$，而看不见的六边形面积为 40，与 $H(0)$ 吻合。
- 当 $p = 4$ 时，穿过 T 的射线沿直线 $x = 4$ 笔直向上，而 $H(4) = 40$ 再次成立。两个端点的值相等是个好兆头：公式没有偏向一边。
- 我们在 600×600 的网格上计数看不见的点，逐一检验由 P 出发的视线是否穿过塔楼。当 $p = 8 - 4\sqrt{2}$ 时，结果是 40.687，而 $52 - 8\sqrt{2} = 40.686$。当 $p = 1$ 时，结果是 40.429，而 $H(1) = \frac{283}{7} \approx 40.429$。

常见错误

- 用 Z 而不是 T 或 Y 作为擦边点。从左下方望去，塔楼的轮廓由 T 和 Y 这两个顶角决定，而不是由远处的那个顶角决定。
- 做第 (ii) 部分时只求出驻点（stationary point）便停下来。驻点给出的是最小可见面积，所以最大值必定来自端点，而这里有两个。

STEP 之外

这是可见性（visibility）问题的一个小例子，这类问题属于计算几何（computational geometry）的研究范围（“美术馆问题”（art gallery problem）问的是：要看守一个多边形房间的每一点，需要多少名守卫）。当中求最大、最小值的一步，展示了分析学中的一个基本事实：闭区间上的连续函数必定取得其最大值和最小值，取得之处不是驻点便是端点。这就是极值定理（extreme value theorem），其严谨证明可见于 Abbott, *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。