详细解答

# STEP I 1991，第 3 题

纯数学 · 复数等比级数

**STEP I 1991，第 3 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/91-s1-q3

## 关键思路

在阿根图（Argand diagram）上，乘以 $re^{i\phi}$ 会把一个向量放大 $r$ 倍，并按逆时针方向转过角 $\phi$。路径上每一条线段都是前一条线段按相同的比例缩放、按相同的角度旋转而成，所以每个线段向量都等于前一个乘以一个固定的复数（complex number）。于是这些线段构成一个等比数列（geometric progression），把它们加起来便得出每个顶点的位置。

## 解答

### 相邻线段之比

由 $P_n$ 到 $P_{n+1}$ 的向量由 $z_{n+1}-z_n$ 表示，而由 $P_{n-1}$ 到 $P_n$ 的向量则由 $z_n-z_{n-1}$ 表示。两个复数相除时，模（modulus）相除，辐角（argument）相减：

$$\left|\frac{z_{n+1}-z_n}{z_n-z_{n-1}}\right| = \frac{P_nP_{n+1}}{P_{n-1}P_n} = d, \qquad \arg\frac{z_{n+1}-z_n}{z_n-z_{n-1}} = \arg(z_{n+1}-z_n) - \arg(z_n-z_{n-1}) = \theta,$$

因为第二条线段的长度是第一条的 $d$ 倍，而由一条有向线段的方向按逆时针转到下一条的方向，所转的角是 $\theta$。（辐角只确定到相差 $2\pi$ 的倍数，但这并不影响该复数本身。）因此，对所有 $n \geq 2$，

$$\frac{z_{n+1}-z_n}{z_n-z_{n-1}} = d\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = d(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

### $z_{n+1}$ 的公式

设 $w = de^{i\theta}$。第一条线段是 $z_2 - z_1 = 1$，而其后每一条线段都是前一条的 $w$ 倍，所以由归纳法（induction）可得

$$z_{k+1} - z_k = w^{k-1} \qquad (k \geq 1).$$

把 $k = 1, 2, \ldots, n$ 的各式相加，左边逐项相消（telescoping），只剩下 $z_{n+1} - z_1 = z_{n+1}$：

$$z_{n+1} = 1 + w + w^2 + \cdots + w^{n-1} = \frac{w^n - 1}{w - 1} = \frac{d^n e^{in\theta} - 1}{de^{i\theta} - 1}.$$

求等比级数（geometric series）之和时需要 $w \neq 1$，而 $d \neq 1$ 这个条件正是用在这里，因为 $|w| = d$。

### $\theta = \frac{1}{3}\pi$、$d = 2$ 的情况

这时 $w = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$，所以分母非常简单：$w - 1 = i\sqrt{3}$。由于 $\frac{1}{i} = -i$，

$$z_{n+1} = \frac{w^n - 1}{i\sqrt{3}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}\left(2^n \cos\tfrac{n\pi}{3} - 1 + i\,2^n \sin\tfrac{n\pi}{3}\right),$$

从而

$$\operatorname{Re} z_{n+1} = \frac{2^n \sin\frac{n\pi}{3}}{\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{Im} z_{n+1} = \frac{1 - 2^n \cos\frac{n\pi}{3}}{\sqrt{3}}.$$

> **想一想** $\operatorname{Im} z_{n+1}$ 的正负号怎样告诉我们路径穿过实轴（real axis）？

这条路径是连贯的：它是由线段首尾相接而成的一条连续折线。如果某个顶点严格位于实轴下方，而其后某个顶点严格位于实轴上方（或者反过来），那么两者之间的那段路径必定穿过实轴。所以我们要一次又一次地找出位于实轴两侧的顶点。

$\cos\frac{n\pi}{3}$ 的值以 6 为周期重复。取任意整数 $k \geq 1$。

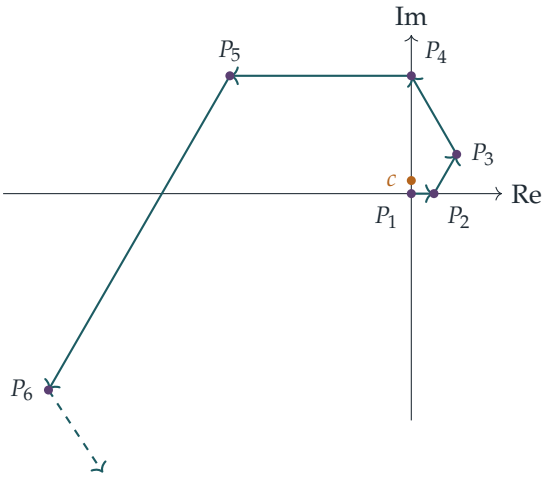
- 当 $n = 6k$ 时，$\cos\frac{n\pi}{3} = \cos 2k\pi = 1$，所以 $\operatorname{Im} z_{6k+1} = \dfrac{1 - 2^{6k}}{\sqrt{3}} < 0$，因为 $2^{6k} > 1$。
- 当 $n = 6k + 3$ 时，$\cos\frac{n\pi}{3} = \cos(2k\pi + \pi) = -1$，所以 $\operatorname{Im} z_{6k+4} = \dfrac{1 + 2^{6k+3}}{\sqrt{3}} > 0$。

因此，对所有 $k \geq 1$，$P_{6k+1}$ 在实轴下方，而 $P_{6k+4}$ 在实轴上方。所以对每个 $k = 1, 2, 3, \ldots$，路径由 $P_{6k+1}$ 到 $P_{6k+4}$ 的那一段都会由下而上穿过实轴。这些是路径上互不相同的部分，每个 $k$ 对应一段，所以路径穿过实轴无限多次。（按同样的论证，路径在 $P_{6k+4}$ 与 $P_{6k+7}$ 之间也会由上而下穿过实轴。）证明至此完成。

事实上，顶点是每三个一组地绕圈的：$\operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2, \ldots$ 的正负号规律是 $0, 0, +, +, +, -, -, -, +, +, +, \ldots$。这背后有一个巧妙的几何原因。把上式写成

$$z_{n+1} = \frac{i}{\sqrt{3}} - \frac{i}{\sqrt{3}}\, w^n,$$

可见 $P_{n+1}$ 与定点 $c = \mathrm{i}/\sqrt{3}$ 的距离是 $2^n/\sqrt{3}$，而每走一步，它便绕 $c$ 转过 $60°$。各顶点位于一条环绕 $c$ 的螺线上，这条螺线每走一步便放大一倍，而 $c$ 刚好在实轴上方不远处，所以螺线会不断扫过实轴。




图中显示 $P_1, \ldots, P_6$；下一个顶点是 $P_7 = -21\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，远在下方。路径第一次穿过实轴是在 $P_5P_6$ 上，其后一直留在实轴下方，直至在 $P_8P_9$ 上由下而上穿过，即由 $P_8 = 64 - 21\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 到 $P_9 = 128 + 43\sqrt{3}\,\mathrm{i}$。

## 验算

- 直接由几何关系计算：$z_3 = 1 + w = 2 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$，而公式给出 $\operatorname{Im} z_3 = (1 - 4\cos\frac{2\pi}{3})/\sqrt{3} = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$。同样地，再加上 $w^2 = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$ 和 $w^3 = -8$，得 $z_5 = -8 + 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}$，而在公式中取 $n = 4$，得 $\operatorname{Re} z_5 = 16\sin\frac{4\pi}{3}/\sqrt{3} = -8$ 和 $\operatorname{Im} z_5 = (1+8)/\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$。
- 若 $d = 1$，各顶点会落在一个正多边形上，路径会闭合；等比级数的求和公式恰好在这个情况下失效，这正是应有的结果。
- 我们按长度和转角以数值方法建构了这条路径（$d$、$\theta$ 和起点均随机选取），并确认了比值 $d\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$、$z_{n+1}$ 的闭合式（closed form），以及在 $\theta = \frac{1}{3}\pi$、$d = 2$ 时上述的正负号规律：在 $z_1, \ldots, z_{41}$ 之中，$\operatorname{Im} z$ 共变号 13 次。

## 常见错误

- 把比值写成 $\frac{1}{d}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$：分子是*较后*的那条线段，所以它才是长 $d$ 倍、并转过 $+\theta$ 的那一条。

- 求和时项数差一：由 $P_1$ 到 $P_{n+1}$ 共有 $n$ 条线段，所以级数加到 $w^{n-1}$ 为止。
- 单凭一个位于轴上的顶点便声称路径穿过实轴：你需要的是*严格*位于实轴两侧的顶点（这里 $z_1$ 和 $z_2$ 都在实轴上，所以要由 $k \geq 1$ 开始）。

## STEP 之外

规则 $z_{n+1} - z_n = w(z_n - z_{n-1})$ 是一个线性递归关系（linear recurrence），而把每个顶点带到下一个顶点的映射 $z \mapsto c + w(z - c)$，是以其不动点（fixed point）$c$ 为中心的*旋转相似变换*（spiral similarity）：即旋转与放大的结合。这类映射是莫比乌斯变换（Möbius transformation）最简单的例子，把它们反复迭代，便会产生贝壳上常见的等角螺线（又称对数螺线，equiangular (logarithmic) spiral）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）以这种几何眼光看待复数乘法，阐述得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。