详细解答

STEP I 1991，第 2 题

纯数学 · 变率

> **STEP I 1991，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/91-s1-q2

关键思路

把融化规律改用半径来表达。对球体而言，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，而表面积同样是 $4\pi r^2$，所以“体积减少的速率与表面积成正比”其实只是说半径以恒定速率缩短。两个雪球的比例常数相同，因此在任何一段时间内，两个半径缩短的长度都相同。于是所有量都变成单一变量的函数（function），这个变量就是每个半径缩短了的长度 x。

解答

两个半径以相同的恒定速率缩短

设雪球的半径为 r，体积为 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$，表面积为 $S = 4\pi r^2$。融化规律是 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -kS$，其中 $k > 0$ 为常数，两个雪球的常数相同。由链式法则（chain rule），

$$4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k \cdot 4\pi r^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -k,$$

这里两边除以 $4\pi r^2$，只要雪球仍然存在（$r > 0$），这一步便成立。所以经过时间 t 后，两个半径都减少了相同的长度 $x = kt$：头部的半径为 $2R - x$，身体的半径为 $3R - x$，适用于 $0 \le x \le 2R$（头部在 $x = 2R$ 时消失）。

高度减半时的体积

由于头部放在身体之上，Frosty 的高度是两个直径之和：

$$h = 2(2R - x) + 2(3R - x) = 10R - 4x.$$

最初 $h = 10R$，所以高度减半即 $10R - 4x = 5R$，也就是 $x = \frac{5}{4}R$。这个值小于 $2R$，所以头部仍然存在，此时两个半径分别为 $\frac{3}{4}R$ 和 $\frac{7}{4}R$。因子 $\frac{4}{3}\pi$ 在比值中约去，所以

$$\frac{V}{V_0} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{7}{4}\right)^3}{2^3 + 3^3} = \frac{(27 + 343)/64}{35} = \frac{370}{2240} = \frac{37}{224}.$$

所以当 Frosty 的高度减半时，他的体积只剩下原来的 $\frac{37}{224} \approx 0.165$：体积随长度的三次方而变化。

$\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ 的最大值

记 $a = 2R - x$ 及 $b = 3R - x$。当 $0 \le x < 2R$ 时，

$$V = \tfrac{4}{3}\pi(a^3 + b^3), \qquad S = 4\pi(a^2 + b^2),$$

又因为 $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}x} = -1$，

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = -4\pi(a^2 + b^2), \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = -8\pi(a + b).$$

> **想一想** V 和 S 都是时间（或 x）的函数。那么 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}S$ 是甚么意思?

当 x 增加时，S 严格递减（因为 $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} < 0$），所以 V 可以看成 S 的函数。由链式法则 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \Big/ \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}$：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{a^2 + b^2}{2(a + b)}.$$

现在利用 $b - a = R$，这个关系始终不变。设 $s = a + b = 5R - 2x$。那么 $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}((a + b)^2 + (b - a)^2) = \frac{1}{2}(s^2 + R^2)$，所以

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S} = \frac{s^2 + R^2}{4s} = \frac{s}{4} + \frac{R^2}{4s} = f(s), \text{ 记为此.}$$

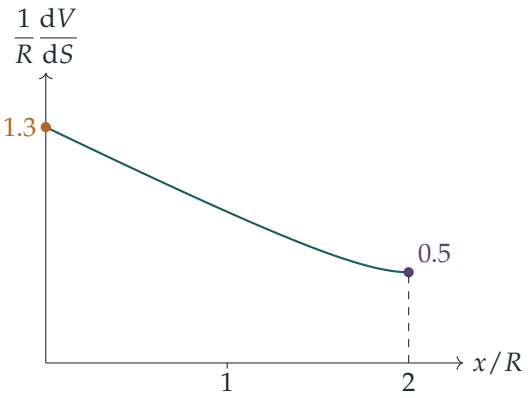
当 x 由 0 增至 $2R$ 时，s 由 $5R$ 减至 R。而

$$f'(s) = \frac{1}{4} - \frac{R^2}{4s^2} = \frac{s^2 - R^2}{4s^2} > 0 \quad \text{当} s > R,$$

所以 f 在 $[R, 5R]$ 上递增，其最大值在 $s = 5R$ 处取得，也就是在最开始的时候（$x = 0$）：

$$\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}S}\right)_{\max} = \frac{5R}{4} + \frac{R}{20} = \frac{13R}{10}.$$

（直接计算：$\frac{4R^2 + 9R^2}{2 \cdot 5R} = \frac{13}{10}R$。）其后这个值持续下降，到头部刚好消失时降至 $f(R) = \frac{1}{2}R$。



验算

- 对每个雪球按 $\frac{dV}{dt} = -kS$ 逐步模拟（取 $R = k = 1$），在 $t \approx 1.25$ 时高度减半，体积比为 0.16518，与 $\frac{37}{224} = 0.165178\ldots$ 吻合。
- 模拟所得的 V 和 S 的有限差分（finite differences）自始至终与 $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$ 相符，而且从不超过 $1.3R$。
- 单位：dV/dS 是体积除以面积，所以是长度，$\frac{13}{10}R$ 正是如此。

常见错误

- 把高度当成两个半径之和，而不是两个直径之和。（在这题中碰巧不会改变 x 的值，但做法是错的。）
- 计算了 V/S 而不是 dV/dS；对单一球体而言，$V/S = r/3$，但 $dV/dS = r/2$。
- 一味寻找驻点（stationary point）：f 的转向点在 $s = R$，即区间的端点，所以最大值在区间的另一端。

STEP 之外

这道题的核心在于：“速率与表面积成正比”这条规律，会化为半径以恒定速率变化，这是几何如何令微分方程（differential equation）变得轻而易举的第一个例子。后半部分是参数式导数（parametric derivative），即沿曲线 $(S(t), V(t))$ 的 dV/dS，以及在闭区间（closed interval）上求最大值时须有的谨慎：最大值可能位于端点，而不是驻点；Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）解释了为何这样的最大值必定存在。至于以微分方程建立模型，可参考 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential*

Equations（初等微分方程）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。